

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2009
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. L'équation caractéristique de la suite récurrente (S) : $V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$ est : $r^2 + r - 6 = 0$. Elle admet deux solutions distinctes : $r = 2$ et $r = -3$. On en déduit que la suite (a_n) de terme général $a_n = \alpha 2^n$ et (b_n) de terme général $b_n = \beta(-3)^n$ sont les suites géométriques de (S) . Le premier terme étant égal à 1, on a $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. D'où $a_n = 2^n$ et $b_n = (-3)^n$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$U_{n+2} + U_{n+1} - 6U_n = \alpha \underbrace{(2^{n+2} + 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n)}_{=0} + \beta \underbrace{((-3)^{n+2} + (-3)^{n+1} - 6(-3)^n)}_{=0} = 0$$

Donc $(U_n) \in S$.

2. a. Solution particulière de $8\alpha - 27\beta = -11$. L'algorithme d'Euclide : $27 = 8 \times 3 + 3$, $8 = 3 \times 2 + 2$, $3 = 2 \times 1 + 1$. En remontant :

$$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 3 \times 2) = -8 + 3 \times 3 = -8 + (27 - 8 \times 3) \times 3 = -8 \times 10 + 27 \times 3$$

Donc $8(-10) - 27(-3) = 1$, puis $8 \times 110 - 27 \times 33 = -11$. $(110, 33)$ est une solution particulière.

Ensemble des solutions : $8\alpha - 27\beta = 8 \times 110 - 27 \times 33 \Leftrightarrow 8(\alpha - 110) = 27(\beta - 33)$. Comme 8 est premier avec 27, d'après Gauss 8 divise $\beta - 33$: $\beta = 33 + 8k$, $\alpha = 110 + 27k$. L'ensemble est $\{(110 + 27k; 33 + 8k); k \in \mathbb{Z}\}$.

Méthode. Équation diophantienne $a\alpha + b\beta = c$: **1)** algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(a, b)$, puis remontée des égalités (identité de Bézout) pour obtenir une solution particulière ; **2)** soustraire membre à membre l'équation et sa solution particulière ; **3)** conclure avec le théorème de Gauss pour décrire toutes les solutions.

b. En remplaçant dans $4\alpha + 9\beta = 17$, on trouve $k = -4$.

$$\text{c. } \begin{cases} U_2 = 17 \\ U_3 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 9\beta = 17 \\ 8\alpha - 27\beta = -11 \end{cases} . \text{ Avec } k = -4 : \alpha = 2, \beta = 1. \text{ D'où } U_n = 2 \cdot 2^n + (-3)^n.$$

d. $-3 \equiv 2 \pmod{5}$ donc $(-3)^n \equiv 2^n \pmod{5}$. Ainsi $2 \cdot 2^n + (-3)^n \equiv 2^n(1 + 2) \pmod{5}$, soit $U_n \equiv 3 \cdot 2^n \pmod{5}$.

e. $U_0 \equiv 3, U_1 \equiv 1, U_2 \equiv 2, U_3 \equiv 4, U_4 \equiv 3 \pmod{5}$. Tout n s'écrit $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$. Comme $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$:

- $n = 4k : U_{4k} \equiv 3 \pmod{5} ; \quad n = 4k + 1 : U_{4k+1} \equiv 1 \pmod{5} ;$
- $n = 4k + 2 : U_{4k+2} \equiv 2 \pmod{5} ; \quad n = 4k + 3 : U_{4k+3} \equiv 4 \pmod{5}.$

Méthode. Reste d'une suite modulo m : repérer une puissance qui « boucle » (ici $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$), puis discuter suivant le reste de n dans la division par la période (ici $n = 4k, 4k+1, 4k+2$ ou $4k+3$).

3. a. $W_n = 2 \cdot 2^n + (-3)^n = U_n$, donc $W_n \equiv 3 \cdot 2^n \pmod{5}$.

$$S_n \equiv 3(2^0 + \dots + 2^n) \equiv 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \equiv -3(1 - 2^{n+1}) \equiv 2 - 4 \cdot 2^n \pmod{5}$$

b. $1956 = 4 \times 489$, donc $S_{1956} \equiv 2 - 4(2^4)^{489} \equiv 2 - 4 \equiv 3 \pmod{5}$. Le reste est 3.

Exercice 2

1. Discriminant $\Delta = -2 + 2\sqrt{3}i$. On cherche $u = x + iy$ avec $u^2 = \Delta : x^2 - y^2 = -2, xy = \sqrt{3}, x^2 + y^2 = 4$. D'où $x = \pm 1, y = \pm \sqrt{3}$ (mêmes signes), $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2$. Solutions :

$$z' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(-1+i), \quad z'' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(-1-i)$$

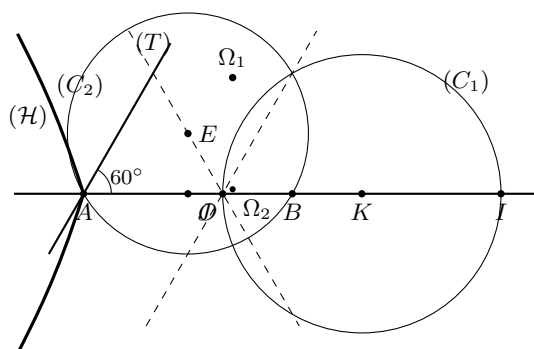
Méthode. Racines carrées d'un nombre complexe $\Delta = a + ib$: poser $u = x + iy$ et résoudre le système formé par $x^2 - y^2 = a$ (parties réelles), $2xy = b$ (parties imaginaires) et $x^2 + y^2 = |\Delta|$ (égalité des modules) ; le signe de b impose les signes relatifs de x et y .

2. $z' = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) ; \quad z'' = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right).$

Problème

Partie A

I. 1. Construction de I : $2\vec{IB} - \vec{IA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AI} = 2\vec{AB}$; B est le milieu de $[AI]$.
Construction de J : $2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AB}$.



(Figure de principe : cercles (C_1) , (C_2) , tangente (T) , hyperbole (H) et ses asymptotes.)

II. 2. Le centre du cercle (C_2) est l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à (T) passant par A .

3. $J \in (C_1)$ avec $\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AB}$: J est sur l'arc de (C_1) situé dans (C_2) . $B \in (C_2)$ et $\vec{IB} = \frac{3}{4}\vec{IJ}$: B est sur l'arc de (C_2) situé dans (C_1) . Donc Ω_1 et Ω_2 sont de part et d'autre de (AB) . En effet $2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{JI} + 4\vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{IB} = \frac{3}{4}\vec{IJ}$.

III. 1. Soit Ω le centre de S : $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Or $((T), (AB)) = \frac{\pi}{3} [\pi]$ (angle tangente-corde = angle inscrit), donc $\Omega \in (C_2)$; orientation positive $\Rightarrow \Omega = \Omega_1$.

2. Comme $S(A) = B$, $A\Omega_1 = 2B\Omega_1$. Alors $AB^2 = A\Omega_1^2 + B\Omega_1^2 - 2(2B\Omega_1)(B\Omega_1)\frac{1}{2} = A\Omega_1^2 - B\Omega_1^2$, soit $AB^2 + B\Omega_1^2 = A\Omega_1^2$: le triangle $AB\Omega_1$ est rectangle en B . Le centre E du cercle circonscrit est le milieu de $[A\Omega_1]$, donc A, E, Ω_1 sont alignés.

Partie B

I. 1. a. $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO}$ (car $3\vec{JB} + 2\vec{BO} = \vec{0}$) ; (BO) est la médiane du triangle EFB issue de B , donc J est le centre de gravité de EFB .

b. J centre de gravité du triangle équilatéral $EFB \Rightarrow EJ = JB = BK$, donc $EJ = BK$. De plus $(EJ) \perp (\Omega_1 A)$, $(BK) \perp (\Omega_1 B)$, angles aigus, donc $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = (\overrightarrow{\Omega_1 A}, \overrightarrow{\Omega_1 B}) = 60^\circ$.

c. Comme $EJ = BK$ et $\overrightarrow{EJ} \neq \overrightarrow{BK}$, il existe une rotation R d'angle 60° transformant E en B et J en K .

2. Le triangle $\Omega_1 EB$ équilatéral : médiatrice de $[EB]$ passe par Ω_1 . $BJ = BK$ et $(JK) \perp (B\Omega_1)$: $(B\Omega_1)$ est médiatrice de $[JK]$. Les deux médiatrices se coupent en Ω_1 , centre de R .

II. 1. La médiatrice de $[EB]$ passe par J , F et Ω_1 : ces points sont alignés.

2. $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R = S_{(EF)} \circ S_{(\Omega_1 F)}$: composée de deux symétries d'axes sécants en F , c'est une rotation de centre F .

Partie C

1. (IJ) est l'axe focal de (H) , le second foyer est I' (symétrique de I par rapport à J), A et K sont les sommets. Construction de M : $M_0 =$ intersection de $[\Omega_1 I]$ et du cercle directeur (C_d) associé à I ; $M =$ intersection de $[I\Omega_1]$ et de la médiatrice de $[I'M_0]$. En effet $MI' - MI = MM_0 - MI = IM_0 = AK$, donc $M \in (H)$.

2. $(J\Omega_1) \perp (I\Omega_1)$ ($IJ\Omega_1$ inscrit dans (C_1) de diamètre $[IJ]$) ; $[J\Omega_1]$ rayon de (C_p) , donc $(I\Omega_1)$ tangente à (C_p) : $(J\Omega_1)$ est asymptote, et $(F\Omega_1)$ aussi. (JE) , symétrique de $(F\Omega_1)$ par rapport à (JA) , est la seconde asymptote.

3. a. Toute similitude conserve le rapport des distances : $e = \frac{JI}{JK} = 2$.

b. $S(J) = J'$ (milieu de $[\Omega_1 K]$) : $(J'\Omega_1)$ asymptote ; $S(E) = E'$ (milieu de $[\Omega_1 B]$) : $(E'J')$ seconde asymptote. $S(A) = B$: B sommet ; J' centre de (H') ; second sommet K' symétrique de B par rapport à J' .