

Sujet bac 2009 – Série C

Exercice 1

5 points

On considère la famille (S) des suites (V_n) de premiers termes V_0 et V_1 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+2} + V_{n+1} - 6V_n = 0$$

1.
 - a. Déterminer les suites géométriques (a_n) et (b_n) de (S) de premier terme 1.
 - b. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$ où α et β sont des réels, est dans (S) .
2.
 - a. Déterminer les entiers relatifs α et β solutions de l'équation : $8\alpha - 27\beta = -11$.
 - b. Déterminer l'entier relatif k pour que le couple $(\alpha; \beta)$ défini par $\alpha = 110 + 27k$ et $\beta = 33 + 8k$ soit solution de l'équation : $4\alpha + 9\beta = 17$.
 - c. En déduire les valeurs des entiers relatifs α et β pour lesquelles $U_2 = 17$ et $U_3 = -11$.
 - d. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \equiv 3 \cdot 2^n \pmod{5}$.
 - e. Déduire le reste de la division euclidienne du terme U_n par 5.
3. Soit $W_n = 2^{n+1} + (-3)^n$ et $S_n = W_0 + \dots + W_n$.
 - a. Démontrer que $S_n \equiv 2 - 4(2)^n \pmod{5}$.
 - b. Déduire le reste de la division euclidienne de la somme S_{1956} par 5.

Exercice 2

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé de sens direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + (\sqrt{3} + i)z + 1 = 0 \quad (\text{E})$$

2. Écrire les solutions z' et z'' de (E) sous leur forme trigonométrique.

Problème

11 points

Dans le plan (P) orienté, on considère les points A, O, B , dans le sens tels que $AB = 6$ et $\vec{AO} = \vec{OB}$.

Partie A

- I.
 - (a) Construire les points I et J tels que : $2\vec{IB} - \vec{IA} = \vec{0}$ et $2\vec{JB} + \vec{JA} = \vec{0}$.
 - (b) Construire le cercle (C_1) de diamètre $[IJ]$.
- II.
 - (a) Construire la droite (T) passant par A telle que $((T), (AB)) = 60^\circ$.
 - (b) Construire le cercle (C_2) passant par A et B dont la tangente en A est (T) .
 - (c) Démontrer que les cercles (C_1) et (C_2) ont deux points communs Ω_1 et Ω_2 situés de part et d'autre de la droite (AB) . On notera Ω_1 celui situé dans le plan de frontière (AB) contenant le centre E du cercle (C_2) .
- III.
 - (a) Démontrer que le centre de la similitude S d'angle de mesure 60° , de rapport $\frac{1}{2}$ et qui transforme A en B est le point Ω_1 .
 - (b) Démontrer que les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

- I. (a) Soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB) .
 - a. Démontrer que J est le centre de gravité du triangle EFB .
 - b. Démontrer que $EJ = BK$ et $(\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{BK}) = 60^\circ$, K désignant le centre du cercle (C_1) .
 - c. En déduire qu'il existe une rotation R qui transforme E en B et J en K .
- (b) Démontrer que les médiatrices des segments $[EB]$ et $[JK]$ se rencontrent en Ω_1 . En déduire le centre de R .
- II. Soit $g = T_{\overrightarrow{BA}} \circ R$, où R est la rotation de I.c) et $T_{\overrightarrow{BA}}$ la translation du vecteur \overrightarrow{BA} .
 - (a) Démontrer que les points Ω_1 , J et F sont alignés.
 - (b) Démontrer que le centre de rotation de g est F .

Partie C

Soit (H) une hyperbole de centre J , dont un des foyers est I et passant par A .

1. Construire le point M de (H) situé sur le segment $[I\Omega_1]$ ainsi que ses deux sommets.
2. Démontrer que les droites (JE) et $(F\Omega_1)$ sont les asymptotes de (H) . Tracer la branche de (H) située dans le plan de frontière la droite $(B\Omega_1)$ contenant K .
3. On désigne par (H') l'image de (H) par S .
 - a. Démontrer que l'excentricité e de (H') est 2.
 - b. Déterminer les sommets et les asymptotes de (H') .