

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2010
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a.

$$\begin{aligned} x^2 \equiv -1 \pmod{25} &\iff x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{25} \\ &\iff x^2 + 1 \text{ est un multiple de } 25 \\ &\iff x^2 + 1 = 25k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x^2 = -1 + 25k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc les équations $x^2 \equiv -1 \pmod{25}$ et $x^2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$, sont équivalentes.

b. Si $k = 2$ alors $x^2 = -1 + 25 \times 2 = 49$. D'où $x = 7$ ou $x = -7$.

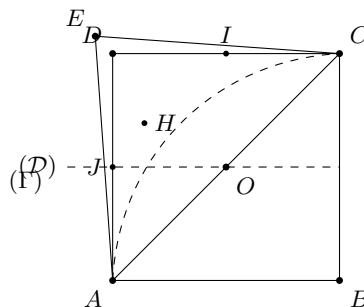
2. a. Pour les premières valeurs : $2^0 - 4 \equiv -3 \equiv 2 \pmod{5}$ (reste 2) ; $2^1 - 4 \equiv -2 \equiv 3 \pmod{5}$ (reste 3) ; $2^2 - 4 \equiv 0 \pmod{5}$ (reste 0) ; $2^3 - 4 \equiv 4 \pmod{5}$ (reste 4) ; $2^4 - 4 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{5}$ (reste 2).

Déduisons les restes suivant les valeurs de n . Tout entier n s'écrit $n = 4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ ou $4k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, alors $(2^4)^k \equiv 1 \pmod{5}$. On en déduit que :

- si $n = 4k$, $2^{4k} - 4 \equiv (2^4)^k - 4 \equiv -3 \equiv 2 \pmod{5}$: le reste est 2.
- si $n = 4k + 1$, $2^{4k+1} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2 - 4 \equiv -2 \equiv 3 \pmod{5}$: le reste est 3.
- si $n = 4k + 2$, $2^{4k+2} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2^2 - 4 \equiv 0 \pmod{5}$: le reste est 0.
- si $n = 4k + 3$, $2^{4k+3} - 4 \equiv (2^4)^k \cdot 2^3 - 4 \equiv 4 \pmod{5}$: le reste est 4.

b. $2010 = 4 \times 502 + 2$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5 est 0. Par conséquent $2^{2010} - 4$ est divisible par 5.

Exercice 2



1. Soit P_0 un point tel que $(\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C}) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. Alors $P_0 \in (\Gamma)$.

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0C}) \pmod{2\pi} \\ &\iff M \text{ est un point de l'arc de cercle } \widehat{AP_0C} \end{aligned}$$

D'où Γ est l'arc de cercle $\widehat{AP_0C}$.

Rappel de cours. Arc capable : l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \equiv \theta [2\pi]$ (avec $\theta \neq 0 [\pi]$) est un arc de cercle d'extrémités A et C (privé de ces extrémités). Tous les points de l'arc « voient » le segment $[AC]$ sous le même angle orienté.

2. a. $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ car E est un point de (Γ) . De plus, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ car $((AC), (D)) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ et $E \in (D)$. On en déduit que le triangle EAC admet deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$. C'est par conséquent un triangle équilatéral.

b. Comme $EA = EC$ et $\overrightarrow{EA} \neq \overrightarrow{EC}$, alors il existe une rotation r d'angle $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, de centre E , qui transforme A en C .

3. a. Dans le triangle EAC : $(GF) \parallel (AC)$ et $(AG) \cap (CF) = \{E\}$; d'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC}$.

Dans le triangle EOA : $(GH) \parallel (AO)$ et $(AG) \cap (OH) = \{E\}$; d'après le théorème de Thalès, $\frac{EG}{EA} = \frac{EH}{EO}$.

On en déduit que $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{EH}{EO}$. Or $\frac{EH}{EO} = \frac{2}{3}$ car H est le centre de gravité du triangle EAC . D'où $\frac{EG}{EA} = \frac{EF}{EC} = \frac{2}{3}$.

b. Les points E, G, A ainsi que E, F, C étant alignés dans le même ordre, on en déduit les égalités vectorielles : $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$. Ce qui montre que G et F sont respectivement les transformés de A et C par l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$.

c. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en G et C en F . Posons $S = h \circ r$. S est une similitude plane directe de centre E , de rapport $\frac{2}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en F . En effet, $S(E) = h \circ r(E) = h(E) = E$ et $S(A) = h \circ r(A) = h(C) = F$.

Problème

Partie A

1. L'équation caractéristique associée à $y'' + \pi^2 y = 0$ est : $r^2 + \pi^2 = 0$. Elle admet deux racines : $r_1 = i\pi$ et $r_2 = -i\pi$. Donc la solution générale est : $y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2. g est de la forme $g(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$ avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\pi = 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 \sin(\pi x)$.

Partie B

3. a. La fonction $x \mapsto 2 \sin \pi x$ existe pour tout $x \in [-4; 0]$; la fonction $x \mapsto x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right)$ existe pour tout $x \in]0; +\infty[$. Donc $E_f = [-4; +\infty[$.

b. Continuité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2 \sin 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} x^2 - x^2 \ln x \right) = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0.

Dérivabilité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin \pi x}{x} = 2\pi \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sin u}{u} = 2\pi$ (en posant $u = \pi x$).
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - x \ln x \right) = 0$. Comme les deux limites diffèrent, f n'est pas dérivable en 0.

Méthode. Fonction définie par morceaux, étude au point de raccord x_0 : **1)** continuité — comparer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $f(x_0)$; **2)** dérivabilité — étudier le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de chaque côté : des limites finies mais différentes donnent un point anguleux (deux demi-tangentes). Limite classique utilisée ici : $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

c. $\forall x \in [-4; -2]$, $2 \sin \pi(x+2) = 2 \sin(\pi x + 2\pi) = 2 \sin \pi x$. La fonction $x \mapsto 2 \sin \pi x$, définie sur $[-4; 0]$, est périodique de période 2. On peut restreindre son étude à $[-2; 0]$, puis reporter le tracé sur $[-4; -2]$ par la translation de vecteur $-2\vec{e}$. D'où l'étude de f peut être réduite à l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4. a. La fonction f est dérivable sur $] - 2; 0[\cup] 0; +\infty[$. $\forall x \in] - 2; 0[$, $f'(x) = 2\pi \cos \pi x$; $\forall x \in] 0; +\infty[$, $f'(x) = -2x \ln x$.

Signes de f' . Sur $] - 2; 0[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos \pi x$:

$$\begin{aligned} \cos \pi x \geq 0 &\iff -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \\ &\iff -\frac{1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{1}{2} + 2k ; k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x \in]-2; -\frac{3}{2}] \text{ ou } x \in [-\frac{1}{2}; 0[\end{aligned}$$

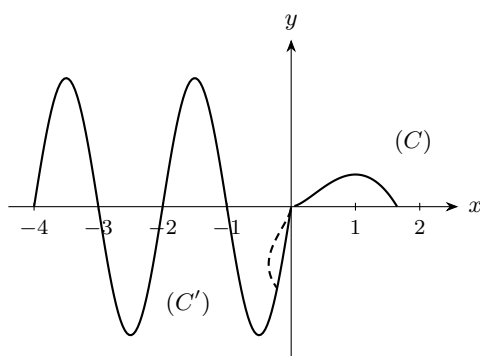
Sur $] 0; +\infty[$: $f'(x) = -2x \ln x \geq 0 \iff x \in] 0; 1]$; $f'(x) \leq 0 \iff x \in [1; +\infty[$.

Tableau de variation de f ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$) :

x	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$					
$f'(x)$		+	0	-	0	+		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

b. Branches infinies. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(\frac{1}{2 \ln x} - 1 \right) = -\infty$. La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Points d'intersection avec l'axe (Ox) . Si $-2 \leq x \leq 0$: $f(x) = 0 \iff \sin \pi x = 0 \iff x = -2$ ou $x = -1$ ou $x = 0$. Si $x > 0$: $f(x) = 0 \iff x^2 \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{e}$. Sur $[-2; +\infty[$, les points d'intersection sont : $(-2, 0)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ et $(\sqrt{e}, 0)$.



5.

$$A_0 = \int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx.$$

Intégrons par parties $\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx$. En posant $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$:

$$\int_1^{\sqrt{e}} x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{e}} x^2 dx.$$

$$\text{D'où } A_0 = \left[\frac{5x^3}{18} - \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{2e\sqrt{e} - 5}{18} \text{ u.a} = \frac{4e\sqrt{e} - 10}{9} \text{ cm}^2.$$

Méthode. Intégration par parties de $\int x^n \ln x dx$: toujours poser $u(x) = \ln x$ (la dérivation le transforme en $\frac{1}{x}$, plus simple) et $v'(x) = x^n$. Penser aussi à convertir les unités d'aire : 1 u.a = (unité en abscisse) $\times$ (unité en ordonnée), ici $2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$.

6. Voir figure.

7. a. Comme toute similitude de rapport k multiplie l'aire de la transformée par k^2 , la similitude S multiplie l'aire par $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. D'où : $A_n = \frac{1}{2}A_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{n-2} = \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0$.

b. $(A_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$S_n = A_0 + \frac{1}{2}A_0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n A_0 = \frac{A_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2A_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2A_0 = \frac{8e\sqrt{e} - 20}{9} \text{ cm}^2.$$