Sujet bac 2010 – Série C

Exercice 1

4 points

1. a. Montrer que les équations $x^2 \equiv -1$ [25] et $x^2 = -1 + 25k$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont équivalentes.

   b. Pour $k = 2$, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -1$ [25].

2. a. Trouver suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de $2^n - 4$ par 5.

   b. En déduire le reste de la division euclidienne de $2^{2010} - 4$ par 5. Que peut-on alors dire de la divisibilité de $2^{2010} - 4$ par 5 ?

Exercice 2

5 points

Dans le plan orienté (P), on considère un carré $ABCD$ de sens direct, de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AD]$.

1. Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

2. On note (D) la droite passant par A telle que $\big((AC), (D)\big) = \dfrac{\pi}{3}$ $[\pi]$. (D) coupe (Γ) en E.

   a. Montrer que le triangle EAC est équilatéral.

   b. En déduire qu'il existe une rotation r de centre E qui transforme A en C.

3. On désigne par H le centre de gravité du triangle EAC. La parallèle à la droite (AC) passant par H coupe (EA) et (EC) respectivement en G et F.

   a. Montrer que $\dfrac{EG}{EA} = \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{2}{3}$.

   b. Montrer qu'il existe une homothétie de centre E qui transforme A en G et C en F.

   c. En déduire qu'il existe une similitude plane directe S de centre E qui transforme A en F.

Problème

11 points

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$.

2. Déterminer la solution particulière g vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

Partie B

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin \pi x & \text{si } -4 \leq x \leq 0 \\ x^2\left(\dfrac{1}{2} - \ln x\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

3. a. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.

   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.

   c. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur l'intervalle $I = [-2; +\infty[$.

4. a. Étudier les variations de f sur I. On dressera un tableau résumant les variations de f.
   b. Étudier la branche infinie de (C) et tracer (C) sur son ensemble de définition.
5. Calculer l'aire A_0 du domaine plan (D) limité par la courbe (C), l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 1$, $x = \sqrt{e}$.

Partie C

6. Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Pour $x > 0$, construire l'image (C') de (C) par S.
7. On définit la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} D_0 = D \\ D_{n+1} = S(D_n) \end{cases}$$

   a. Exprimer l'aire A_n du domaine (D_n) en fonction de n et A_0.
   b. Exprimer la somme $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ en fonction de n et A_0.
   c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.