

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2010
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. Loi de probabilité de X :

X	-1	0	1
p	$\frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}$	$\frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$	$\frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

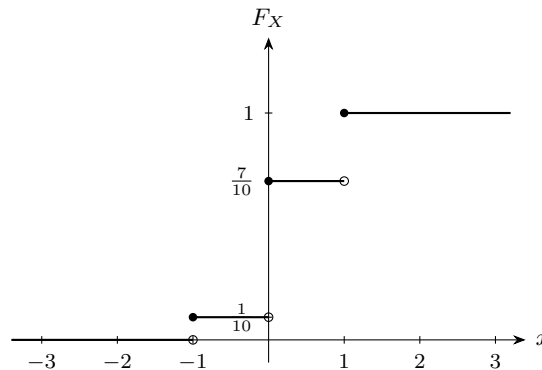
Méthode. Tirage *simultané* de p objets parmi n : les issues sont des combinaisons, non ordonnées — l'univers compte C_n^p cas. Pour $p(X = k)$, multiplier les combinaisons de chaque catégorie (ici $C_2^i \times C_3^j$ boules de chaque couleur) et diviser par C_5^2 . Contrôle : la somme des probabilités doit valoir 1.

2. $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = -1 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{6}{10} + 1 \times \frac{3}{10} = \frac{2}{10}.$

3. a. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est :

X	$] -\infty ; -1[$	$[-1 ; 0[$	$[0 ; 1[$	$[1 ; +\infty[$
$F_X(x)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

b.



Exercice 2

1. On peut prendre pour polynôme de degré 3 le polynôme $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. En remarquant que $\overline{z_2} = -z_1$:

$$\begin{aligned}
 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) &= (z - z_1)(z + \overline{z_1})(z - z_3) \\
 &= (z^2 + (\overline{z_1} - z_1)z - |z_1|^2)(z - z_3) \\
 &= (z^2 - 2iz - 4)(z - z_3) \\
 &= z^3 + (-z_3 - 2i)z^2 + (2iz_3 - 4)z + 4z_3 \\
 &= z^3 - 8i
 \end{aligned}$$

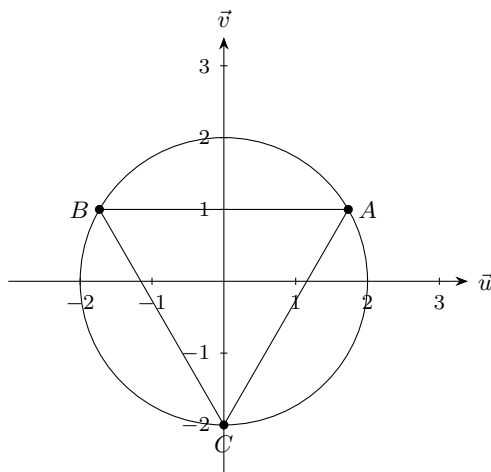
On en déduit $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $z_3 = -2i$.

$$2. \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

$$-2i = 2 \times (-i) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

3. a.



b.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \arg \left(\frac{-\sqrt{3} - 3i}{-2\sqrt{3}} \right) \equiv \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) \equiv \arg \left(\frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} \right) \equiv \arg \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à 180° , on en déduit $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Rappel de cours. Interprétation géométrique du quotient : pour trois points distincts d'affixes a, b, c , $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \frac{c-a}{b-a} [2\pi]$ et $\frac{AC}{AB} = \left| \frac{c-a}{b-a} \right|$. C'est l'outil central pour prouver alignements, orthogonalités et natures de triangles avec les complexes.

c. Le triangle ABC est équilatéral.

Problème

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $g'(x) = \frac{2}{x}$. $\forall x \in] -\infty; 0[$, $g'(x) < 0$: g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$		$-$	$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$0 \quad \searrow \quad -\infty$

2. $g(-1) = 2 \ln(1) = 0$.

Signes de g : g est strictement décroissante sur $] - \infty ; 0[$ et $g(-1) = 0$. On en déduit que $g(x) > 0$ pour tout $x \in] - \infty ; -1[$ et $g(x) < 0$ pour tout $x \in] - 1 ; 0[$.

Partie B

1. La fonction $x \mapsto -2x + 1 + 2x \ln |x|$ existe pour tout $x < 0$; la fonction $x \mapsto (x + 2)e^{-x} - 1$ existe pour tout $x \geq 0$. Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. a. Continuité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 1 + 2x \ln |x|) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x + 2)e^{-x} - 1) = 1 = f(0)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2 + 2 \ln |x|) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-x} + 2 \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, f n'est pas dérivable en 0.

b. $|x| = -x$ si $x < 0$. La fonction f s'écrit $f(x) = -2x + 1 + 2x \ln(-x)$ si $x < 0$. D'où $\forall x \in] - \infty ; 0[$, $f'(x) = -2 + 2 \ln(-x) + 2x \times \frac{-1}{-x} = 2 \ln(-x) = g(x)$.

3. f est dérivable sur $] - \infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ -(x + 1)e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On en déduit que :

- pour tout $x \in] - \infty ; -1[$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $] - \infty ; -1[$;
- pour tout $x \in] - 1 ; 0[$, $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $] - 1 ; 0[$;
- pour tout $x > 0$, $f'(x) = -(x + 1)e^{-x} < 0$: f est strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty[$.

Tableau de variation ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln |x| \left(\frac{-2}{\ln |x|} + \frac{1}{x \ln |x|} + 2 \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$) :

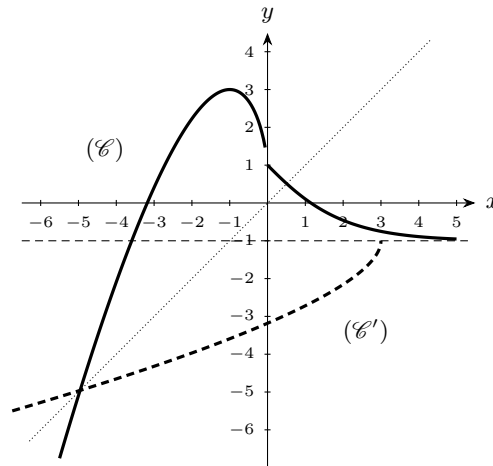
x	$-\infty$	β	-1	0	α	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	0	-1

4. Existence de α ($1 < \alpha < \frac{3}{2}$). $f(1) \approx 0,10$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,22$. f est continue, strictement décroissante sur $] 1 ; \frac{3}{2}[$ et $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in] 1 ; \frac{3}{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Existence de β ($-4 < \beta < -3$). $f(-4) \approx -2,09$ et $f(-3) \approx 0,41$. f est continue, strictement croissante sur $] - 4 ; -3[$ et $f(-4) \times f(-3) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\beta \in] - 4 ; -3[$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x} + 2 \ln |x| \right) = +\infty$: la courbe ($\mathcal{C}$) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$: la courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

6.



7. a. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - 0] dx = \int_0^\alpha [(x+2)e^{-x} - 1] dx = -\alpha + \int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx.$

Intégrons $\int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx$. En posant $u(x) = x+2$, $v'(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{-x}$:

$$\int_0^\alpha (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-x} dx.$$

D'où $\mathcal{A}(\alpha) = \left[-(\alpha+3)e^{-\alpha} - \alpha + 3 \right] \text{ cm}^2.$

b. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-(\alpha+3)e^{-\alpha} - \alpha + 3 \right] = 0.$

Partie C

1. h est une fonction continue, strictement croissante sur $] -\infty; -1]$. Donc h réalise une bijection de $] -\infty; -1]$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x); h(-1)] =] -\infty; 3]$. J est l'intervalle $] -\infty; 3]$.

Rappel de cours. Théorème de la bijection : une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$ (bornes données par les limites ou valeurs aux extrémités). Sa réciproque h^{-1} a le même sens de variation, et sa courbe est la symétrique de celle de h par rapport à la droite $y = x$.

2. Comme h et h^{-1} ont le même sens de variation, on en déduit le tableau de variation de h^{-1} :

x	$-\infty$	3
$(h^{-1})'(x)$	+	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$	-1