

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2011
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. $A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$

2. $A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) \, dx.$

En posant $u(x) = x$, $v'(x) = \cos(2x)$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$, on a en intégrant par parties :

$$A - B = \left[\frac{1}{2} x \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, dx = \left[\frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

3.

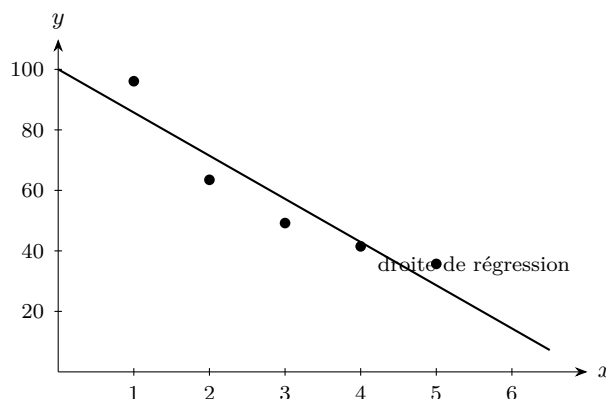
$$\begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} & (1) \\ A - B = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), on en déduit $A = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$. En soustrayant, on en déduit $B = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$.

Méthode. Deux intégrales liées par $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$: plutôt que de les calculer séparément, former $A + B$ (avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$) et $A - B$ (avec $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$), puis résoudre le petit système obtenu.

Exercice 2

1.



2. L'équation de la droite de régression linéaire de y en x est $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3, \quad \bar{y} = \frac{96,1 + 63,5 + 49,2 + 41,5 + 35,7}{5} = 57,2$$

Covariance, variance :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1 \times 96,1 + \dots + 5 \times 35,7}{5} - 3 \times 57,2 = -28,56$$

$$V(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{5} - 3^2 = 2$$

$$a = \frac{-28,56}{2} = -14,28 ; \quad b = 57,2 - (-14,28) \times 3 = 100,04.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire : $y = -14,28x + 100,04$.

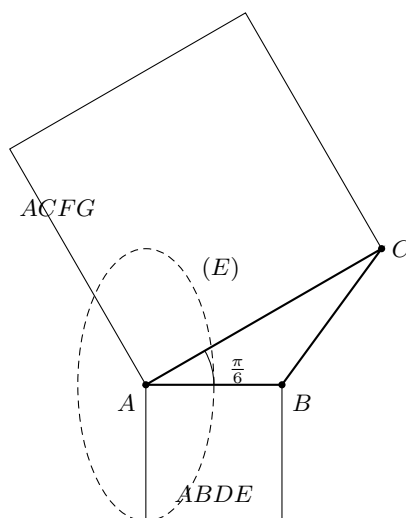
Rappel de cours. Droite de régression de y en x (méthode des moindres carrés) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ — elle passe toujours par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$. Formules de calcul rapides : $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$ et $V(x) = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$.

3. Pour $x = 6$, $y = -14,28 \times 6 + 100,04 = 14,36$ (milliers de francs). Le bénéfice au 6^e mois est estimé à 14 360 francs CFA.

Problème

Partie A

1.



2. Les triangles ABC et EAK sont isométriques.

- $AB = EA$.
- $AC = EK$. En effet, comme $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$, alors $GKEA$ est un parallélogramme. On en déduit que $EK = AG$. Or $AG = AC$. D'où $AC = EK$.
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$. En effet, $(AB) \perp (EA)$ et $(AC) \perp (EK)$; ce sont deux angles aigus à côtés perpendiculaires.

Donc les triangles ABC et EAK sont isométriques (un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur).

Existence de R_1 telle que $R_1(ABC) = EAK$. Comme $AB = EA$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EA}$, il existe une rotation R_1 d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, qui transforme A en E et B en A . On montre ensuite que $R_1(C) = K$: soit K' tel que $R_1(ABC) = EAK'$; on a $AC = EK' = EK$ et $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK'}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}) [2\pi]$, donc $K = K'$ et $R_1(C) = K$.

Construction de Ω_1 . Ω_1 est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AE]$ et $[BA]$.

3. Soit Ω le centre du parallélogramme $GKEA$. La rotation R_0 de centre Ω et d'angle π transforme EAK en GKA . D'où $R_2 = R_0 \circ R_1$ transforme ABC en GKA .

Angle de R_2 . Comme $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq 0 [2\pi]$, alors R_2 est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Construction de Ω_2 . $R_2(A) = G$ et $R_2(C) = A$. Ω_2 est le point d'intersection des médiatrices de $[AG]$ et $[CA]$, c'est-à-dire le centre du carré $ACFG$.

4. a. $f = R_1 \circ R_2$ est la composée de deux rotations de centres distincts dont la somme des angles $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \equiv 0 [2\pi]$. C'est donc une translation.

Rappel de cours. Composée de deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 : c'est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 [2\pi]$, et une *translation* sinon. Pour identifier le vecteur (ou le centre), calculer l'image d'un point bien choisi, comme ici $f(C)$.

b. $f(C) = R_1 \circ R_2(C) = R_1(A) = E$. $\overrightarrow{CE}$ est le vecteur de translation de f .

5. • $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$: comme $R_1(B) = A$ et $R_1(C) = K$, alors $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; or $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AK}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})$.

• $(\overrightarrow{\Omega_1 B}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ car Ω_1 est le centre du carré $ABDE$.

On en déduit que les triangles IAB et $\Omega_1 AB$ sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AB]$. Donc les points A, B, I et Ω_1 sont sur le même cercle (C) de centre O , milieu de $[AB]$.

6. • $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. **•** $(\overrightarrow{\Omega_2 G}, \overrightarrow{\Omega_2 A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On en déduit que les triangles JAG et $\Omega_2 AG$ sont rectangles, d'hypoténuse commune $[AG]$. Donc les points A, G, J et Ω_2 sont sur le même cercle (C') de centre O' , milieu de $[AG]$.

Partie B

7. $S(A) = A$ et $S(O) = O'$. S est la similitude de centre A , de rapport $\frac{AO'}{AO} = 2$ et d'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

8. L'expression complexe de S est $z' - z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$ avec $z_A = 0$. D'où $z' = (-1 + i\sqrt{3})z$.

9. Comme $z' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}z$, on en déduit $z = \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}}z' = \left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z'$. En remplaçant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient après identification :

$$x = \frac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y') \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y').$$

Partie C

10. $4x^2 + y^2 = 4 \iff \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. (E) est une ellipse :

- de centre $A(0, 0)$;
- de sommets : $B(1, 0)$; $J(-1, 0)$; $(0, 2)$; $(0, -2)$;
- de demi-distance focale $c = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ et de foyers $F(0, \sqrt{3})$ et $F'(0, -\sqrt{3})$.

11. En remplaçant x par $\frac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y')$ et y par $-\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')$ dans l'équation $4x^2 + y^2 = 4$, on a : $7x'^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 13y'^2 = 64$. D'où une équation de $(E') : 7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 64$.