Sujet bac 2011 – Série C

Exercice 1 *3 points*

On pose $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx.$

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduire des questions 1. et 2. les valeurs de A et B.

Exercice 2 *5 points*

On donne en milliers de francs CFA le bénéfice d'une ferme avicole qui importe des poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_j (en milliers de francs)	96,1	63,5	49,2	41,5	35,7

1. Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour 1 mois en abscisses et 2 cm pour 5 milliers de francs en ordonnées.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3. Tracer cette droite sur le graphique. Estimer le bénéfice de la ferme avicole au 6^{e} mois.

Problème *12 points*

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle tel que $AC = 2\,AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. On prendra $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm. On construit à l'extérieur de ce triangle, les carrés $ACFG$ et $ABDE$ tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

K est le point tel que $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AE}$. Les droites (AK) et (BC) se coupent en I. Les droites (AB) et (KG) se coupent en J.

Partie A

1. Faire une figure.
2. Démontrer qu'il existe une rotation R_1 qui transforme le triangle ABC en le triangle EAK. On note Ω_1 son centre. Construire Ω_1. Donner l'angle de R_1.
3. Démontrer qu'il existe une rotation R_2 qui transforme le triangle ABC en le triangle GKA. Donner l'angle de R_2. On note Ω_2 son centre. Construire Ω_2.
4. a. On considère l'application $f = R_1 \circ R_2$. Montrer que f est une translation.
   b. Calculer $f(C)$. En déduire le vecteur de translation de f.
5. Démontrer que les points A, B, I et Ω_1 sont situés sur un même cercle (C) de centre O, milieu du segment $[AB]$.
6. Démontrer que les points A, G, J et Ω_2 sont situés sur un même cercle (C') de centre O', milieu du segment $[AG]$.

Partie B

On rapporte maintenant le plan au repère orthonormal direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\overrightarrow{AE}$.

Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme (C) en (C').

7. Donner les éléments caractéristiques de S.
8. Donner l'écriture complexe de la similitude S.
9. Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

Partie C

Soit (E) l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$.

10. Construire (E) tout en précisant son centre, ses sommets et foyers.
11. Déterminer une équation de (E') image de (E) par S.