

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2011
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. La matrice de l'application f est $\begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. L'endomorphisme f est bijectif si le déterminant de sa matrice associée est non nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a - 1.$$

D'où f est bijectif si $a \neq 1$. (Dans la suite, $a = 1$.)

3. a. $\mathcal{B} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3; f(\vec{u}) = \vec{u}\}$. Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathcal{B}$. Alors x, y, z vérifient le système (S) :

$$\begin{cases} x = -x + y + 2z \\ y = x + 2y + z \\ z = x + y \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants par f est $\{(0, 0, 0)\}$.

b. $\ker f = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3; f(\vec{u}) = \vec{0}\}$. Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de $\ker f$. Alors :

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{u}$ de $\ker f$ se décompose en $\vec{u}(x, y, z) = (z, -z, z) = z(1, -1, 1)$. On en déduit que $\ker f$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$, d'équation $\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$.

c. $\text{Im } f = \{f(\vec{u}); \vec{u} \in \mathbb{R}^3\}$. Soit $\vec{u}'(x', y', z')$ un vecteur de $\text{Im } f$. Alors :

$$\begin{cases} -x + y + 2z = x' \\ x + 2y + z = y' \\ x + y = z' \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y + 2z = x' \\ 3y + 3z = x' + y' \\ 2y + z = x' + z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = z - x' \\ 3y + 3z = x' + y' \\ x' - 2y' + 3z' = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées (x', y', z') de $\text{Im } f$ vérifient $x' - 2y' + 3z' = 0$. D'où $(x', y', z') = y'(2, 1, 0) + z'(-3, 0, 1)$. $\text{Im } f$ est le plan vectoriel engendré par $\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$, d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

Méthode. Noyau et image d'un endomorphisme : pour $\ker f$, résoudre $f(\vec{u}) = \vec{0}$ et exprimer les solutions avec un paramètre (droite ou plan vectoriel) ; pour $\text{Im } f$, écrire $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ et éliminer x, y, z du système : la relation restante entre x', y', z' est l'équation de l'image. Quand $\det f \neq 0$, inutile : f est bijectif, $\ker f = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$.

$$4. \vec{u} \in \ker f \iff f(\vec{u}(\alpha, \beta)) = \vec{0} \iff \begin{cases} -1 + \alpha + 2\beta = 0 \\ 1 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 1 + \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \quad . \text{ En}$$

remplaçant α par -1 dans l'une des deux premières équations, on obtient $\beta = 1$. Donc $\vec{u} \in \ker f$ si $\alpha = -1$ et $\beta = 1$.

Exercice 2

1. L'équation (E) a pour discriminant $\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(4 + 4i) = -24 - 10i$.

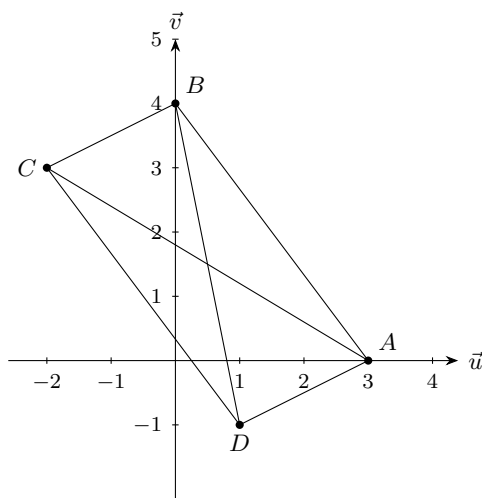
Cherchons un nombre complexe $z = x + iy$ tel que $z^2 = -24 - 10i$. $x^2 - y^2 + 2ixy = -24 - 10i$. Par identification des parties réelles et imaginaires, $x^2 - y^2 = -24$ et $xy = -5$. D'autre part, comme $|z|^2 = |-24 - 10i|$, alors $x^2 + y^2 = 26$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 & (1) \\ x^2 + y^2 = 26 & (2) \\ xy = -5 & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), $x = 1$ ou $x = -1$; de même $y = 5$ ou $y = -5$. L'équation (3) indique que x et y sont de signes contraires. D'où $\Delta = (1 - 5i)^2$. Les solutions de (E) sont :

$$Z_1 = \frac{(1 + 3i) + (1 - 5i)}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{(1 + 3i) - (1 - 5i)}{2} = 4i.$$

2. a. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $Z_A = 3$, $Z_B = 4i$, $Z_C = -2 + 3i$ et $Z_D = 1 - i$.



b. $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = -3 + 4i$; $Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = -3 + 4i$; $Z_{\overrightarrow{CB}} = Z_B - Z_C = 2 + i$; $Z_{\overrightarrow{DA}} = Z_A - Z_D = 2 + i$.

c. Comme $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Problème

Partie A

1. $a + \frac{b}{1+t} = \frac{at + a + b}{1+t}$. On cherche a tel que $\frac{1-t}{1+t} = \frac{a+b+at}{1+t}$. Par identification, $a+b=1$ et $a=-1$. D'où $a=-1$ et $b=2$.

Méthode. Pour intégrer une fraction rationnelle du type $\frac{ct+d}{t+e}$: la mettre d'abord sous la forme $a + \frac{b}{t+e}$ (identification, comme ici), car chaque morceau a une primitive connue — at et $b \ln |t+e|$. L'énoncé guide presque toujours cette décomposition en première question.

$$2. \int_0^x \frac{1-t}{1+t} dt = \int_0^x \left(-1 + \frac{2}{1+t} \right) dt = \left[-t + 2 \ln(1+t) \right]_0^x = -x + 2 \ln(1+x) = -x + \ln(1+x)^2.$$

Partie B

1. La fonction $x \mapsto -x + \ln(x+1)^2$ existe si et seulement si $x+1 \neq 0$. Donc $E_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. La fonction f est dérivable sur E_f et $\forall x \in E_f$, $f'(x) = -1 + \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{x+1}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$-x+1$		+	+	0 -	
$x+1$		-	0	+	
$\frac{-x+1}{x+1}$		-		+	0 -

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; -1[$: f strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1; 1[$: f strictement croissante sur $]-1; 1[$. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$: f strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

3. Tableau de variation ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \left(1 - 2 \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty$) :

x	$-\infty$	-1	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\parallel$	$-\infty$
		$\nearrow$	$-1 + \ln 4$	$\searrow$	0
				$\searrow$	$-\infty$

4. $f(2) \approx 0,197$; $f(3) \approx -0,227$. f est continue, strictement décroissante sur $]2; 3[$, et $f(2) \times f(3) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]2; 3[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

5. $f(-2) = 2$; $f'(-2) = -3$. $f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx 0,11$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -5$. $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$. $f(5) \approx -1,4$; $f'(5) \approx -0,67$.

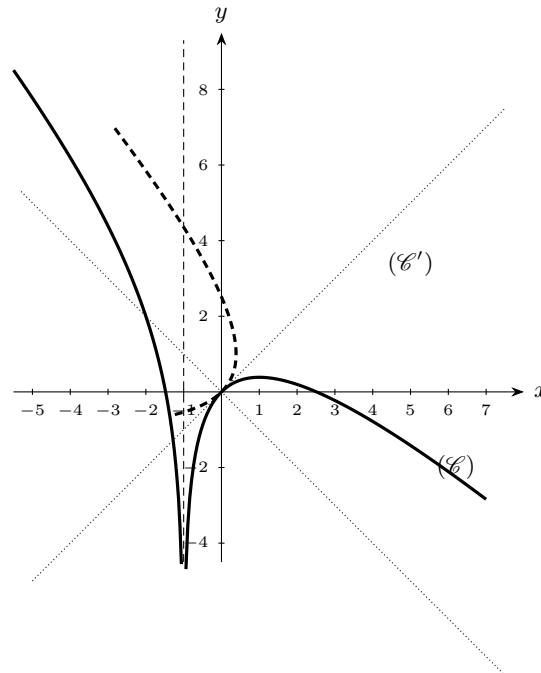
6.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + 2 \frac{\ln|x+1|}{x} \right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x+1)^2 = +\infty$. La courbe ($\mathcal{C}$) admet une direction asymptotique (branche parabolique) de direction la droite d'équation $y = -x$ en $-\infty$.
- De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x)] = +\infty$: direction asymptotique $y = -x$ en $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$. La courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Méthode. Étude d'une branche infinie en $\pm\infty$: calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. Si a est infini : branche parabolique de direction (Oy) ; si $a = 0$: direction (Ox) ; si a est fini non nul, étudier $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$: finie, c'est l'asymptote $y = ax + b$; infinie, c'est une branche parabolique de direction la droite $y = ax$ (cas rencontré ici).

7. Tangente en $x = -2$: $y = f'(-2)(x + 2) + f(-2)$. D'où $y = -3x - 4$.

Tangente en $x = 0$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. D'où $y = x$.



Partie C

1. Tableau de variation de h :

x	-1	1	α	$+\infty$
$h'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1 - \ln 4$	$\nearrow$
			0	$\nearrow$
				$+\infty$

2. Voir graphique.