

Sujet bac 2011 – Série D

Exercice 1

4 points

L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 étant rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui, à tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\vec{u}' = f(\vec{u})$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont définies par :

$$\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Écrire la matrice de l'application f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Pour quelles valeurs de a , f est-elle bijective ?
3. Dans la suite, on pose $a = 1$.
 - a. Déterminer l'ensemble \mathcal{B} des vecteurs de \mathbb{R}^3 invariants par f .
 - b. Déterminer le noyau $\text{Ker } f$ de f et l'image $\text{Im } f$ de f . En déduire une base pour chacun des sous-espaces.
4. Soit \vec{u} un vecteur de \mathbb{R}^3 de composantes $(1, \alpha, \beta)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer α et β pour que $\vec{u} \in \text{Ker } f$.

Exercice 2

4 points

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : Z^2 - (1 + 3i)Z + 4 + 4i = 0$$

1. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E) . On appellera Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution.
2. Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives $3 ; 4i ; -2 + 3i ; 1 - i$.
 - a Placer les points A, B, C et D dans le plan.
 - b Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$.
 - c En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Problème

12 points

Partie A

1. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1-t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$$

2. Calculer $\int_0^x \frac{1-t}{1+t} dt$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = -x + \ln(x+1)^2 \quad \text{où } \ln \text{ désigne le logarithme népérien}$$

1. Donner l'ensemble de définition E_f de f .
2. Déterminer les variations de f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 3[$.
5. Calculer $f(x)$ et $f'(x)$ pour les valeurs de x suivantes : -2 ; $-\frac{3}{2}$; 0 ; 5 .
6. Étudier les branches infinies à (C) , courbe représentative de f .
7. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm, ainsi que les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -2 et 0 .

Partie C

Soit h , la fonction définie par $h(x) = -f(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$.

1. Dresser le tableau de variation de h .
2. Tracer (C') la courbe de la fonction h dans le même repère que (C) .