

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2012
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. Soit $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$, une solution de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(ib)^4 - \sqrt{2}(ib)^3 - 4\sqrt{2}(ib) - 16 &= 0 \iff b^4 - 16 + i\sqrt{2}b(b^2 - 4) = 0 \\ \iff b^4 - 16 &= 0 \text{ et } b(b^2 - 4) = 0 \\ \iff b = 2 \text{ ou } b &= -2\end{aligned}$$

Les solutions imaginaires pures sont $z_0 = 2i$ et $z_1 = -2i$. L'équation peut alors se mettre sous la forme :

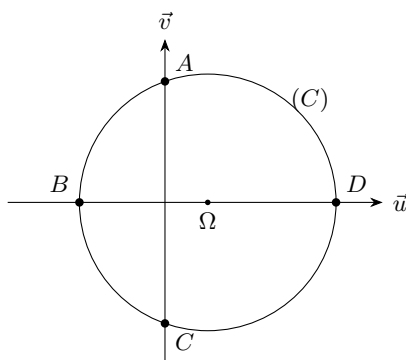
$$Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = (Z - 2i)(Z + 2i)(Z^2 + cZ + d) = (Z^2 + 4)(Z^2 + cZ + d).$$

Le terme de degré 0 du second membre est $4d$: $4d = -16$, d'où $d = -4$. Le terme de degré 1 est $4c$: $4c = -4\sqrt{2}$, d'où $c = -\sqrt{2}$. Il vient : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = (Z^2 + 4)(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4)$.

L'équation $Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(-4) = 18$, admet deux racines $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$. Donc les solutions sont : $z_0 = 2i$, $z_1 = -2i$, $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

Méthode. Solutions imaginaires pures d'une équation polynomiale : injecter $z = ib$ (b réel), séparer partie réelle et partie imaginaire (un complexe est nul si et seulement si les deux sont nulles), résoudre le système en b . Chaque paire $\pm ib$ trouvée fournit le facteur $(Z^2 + b^2)$; le facteur restant s'obtient par identification des coefficients.

2. a.



b.

$$\begin{aligned}\text{Les points } A, B, C, D \text{ cocycliques} &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \pmod{\pi} \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = \frac{-4i}{-\sqrt{2} - 2i} \div \frac{-2i - 2\sqrt{2}}{-3\sqrt{3}} = \sqrt{6} \in \mathbb{R}$$

Donc les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) . Le cercle (C) a pour centre le point d'affixe $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour rayon $\frac{1}{2}|z_D - z_B| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

1. $I_1 = \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$. De plus, $\forall x \in [0; 1], x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$.
Donc $I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $n \geq 3$. $I_n = \int_0^1 x^{n-1} \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. En posant $u = x^{n-1}$, $v' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$, donc $u' = (n-1)x^{n-2}$, $v = -e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$I_n = \left[-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^1 + (n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}.$$

D'où $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 3$.

4. Décroissance de (I_n) . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

La fonction $x \mapsto x^n (x-1) e^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; 1]$ et ≤ 0 sur $[0; 1]$. Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$: la suite (I_n) est décroissante.

Convergence. La suite (I_n) est décroissante (d'après 4.) et minorée par 0 (d'après 2.). Donc elle converge vers une limite l .

Rappel de cours. Théorème de la limite monotone : toute suite décroissante et minorée (ou croissante et majorée) converge. Il garantit l'existence de la limite sans donner sa valeur — celle-ci s'obtient ensuite, par exemple par encadrement (question suivante).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [0; 1], -\frac{x^2}{2} \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, $0 < e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1$. On en déduit $0 \leq x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq x^n$. Par passage à l'intégrale :

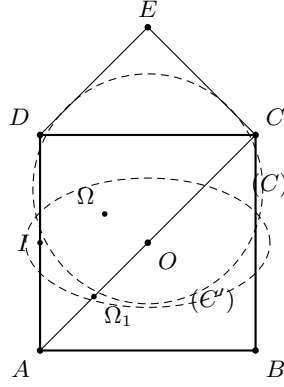
$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Calcul de l . Par passage à la limite, $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. On en déduit que $l = 0$.

Méthode. Limite d'une suite d'intégrales : encadrer l'intégrande sur l'intervalle (ici $0 \leq e^{-x^2/2} \leq 1$ donc $0 \leq x^n e^{-x^2/2} \leq x^n$), intégrer l'encadrement (l'intégrale conserve les inégalités), puis conclure avec le théorème des gendarmes.

Problème



1. $IE^2 = ID^2 + DE^2 = AI^2 + IO^2 = AO^2$. Donc $IE = AO$.
2. Comme $IE = AO$ et $\overrightarrow{IE} \neq \overrightarrow{AO}$, alors il existe une unique rotation r , d'angle $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})$ qui transforme I en A et E en O . Cet angle vaut $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
3. Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[IA]$ et $[EO]$.
4. Comme $r(E) = O$, alors $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'autre part, $(\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'où $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv (\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) [2\pi]$: les points Ω , E , O , Ω_1 sont cocycliques.
5. • Le triangle ΩAI est rectangle isocèle. Comme $r(I) = A$, alors $\Omega A = \Omega I$ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'où le triangle ΩAI est rectangle isocèle en Ω .
 • Le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle. Dans le triangle AOD : $\Omega_1 \in [AO]$, $I \in [AD]$ et $(\Omega_1 I) \parallel (OD)$. D'après Thalès, $\frac{A\Omega_1}{AO} = \frac{\Omega_1 I}{OD}$, donc $\frac{A\Omega_1}{\Omega_1 I} = \frac{AO}{OD} = 1$, d'où $A\Omega_1 = \Omega_1 I$. De plus, $(\overrightarrow{\Omega_1 I}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) = (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Donc le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle en Ω_1 .
 Les triangles ΩAI et $\Omega_1 AI$ sont rectangles isocèles d'hypoténuse commune $[AI]$. Donc le quadrilatère $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.
6. $S(ABCD) = A\Omega_1 I\Omega$. La similitude S vérifie $S(A) = A$ et $S(B) = \Omega_1$. D'où S est la similitude de centre A , d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega_1}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et de rapport :

$$\frac{A\Omega_1}{AB} = \frac{\frac{1}{4}AC}{AB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

7. • $S(B) = \Omega_1$ et $S(C) = I$. Comme K est le milieu de $[BC]$, alors $S(K) = K'$ est le milieu de $[\Omega_1 I]$.
 • $S(C) = I$ et $S(D) = \Omega$. Comme L est le milieu de $[CD]$, alors $S(L) = L'$ est le milieu de $[I\Omega]$.
8. $\overline{S}(Q) = Q$. $\overline{S}$ est une similitude plane indirecte de centre Q , d'axe (OD) et de rapport $\frac{1}{2}$.
9. a. $\overline{S}(C) = J$. $\overline{S}(C) = h_{(Q, \frac{1}{2})} \circ S_{OD}(C) = h_{(Q, \frac{1}{2})}(A)$. On en déduit que $h_{(Q, \frac{1}{2})}(A) = J$. D'où $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.
- b.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} &\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\ &\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} \iff \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0} \iff Q = B \end{aligned}$$

10. a. f est une affinité orthogonale d'axe (OE) , de rapport $\frac{1}{2}$.

b. Voir figure.

c. (C') est une ellipse.