Sujet bac 2012 – Série C

Exercice 1 *3 points*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 - \sqrt{2}\,Z^3 - 4\sqrt{2}\,Z - 16 = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{2}$; $z_C = -2i$ et $z_D = 2\sqrt{2}$.
   a. Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   b. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 2 *5 points*

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (I_n) définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

1. Calculer I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 0$.
3. Par une intégration par parties, montrer que $I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ (On pourra écrire $x^n = x^{n-1} \cdot x$).
4. Étudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente et converge vers une limite l.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Calculer l.

Problème *12 points*

Le plan P est orienté. $ABCD$ est un carré de sens direct, de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$.

1. E est le point du plan tel que le triangle IDE soit rectangle isocèle en D et de sens direct. Montrer que $IE = AO$.
2. En déduire qu'il existe une rotation r transformant I en A et E en O. Préciser une mesure θ de l'angle de la rotation r.
3. Construire Ω le centre de la rotation r.
4. On désigne par Ω_1, le point d'intersection des droites (IE) et (OA). Montrer que les points Ω, E, O, Ω_1 sont situés sur un cercle (C) que l'on tracera.
5. Montrer que $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.
6. Donner les caractéristiques de la similitude plane directe S qui transforme le carré $ABCD$ en $A\Omega_1 I\Omega$.
7. Placer $K' = S(K)$ puis $L' = S(L)$.
8. Soit $\overline{S} = h_{(Q,\frac{1}{2})} \circ S_{OD}$, Q étant un point de la droite (OD). Caractériser $\overline{S}$.
9. On se propose de construire Q sachant que $\overline{S}(C) = J$.

a. Montrer que si $\overline{S}(C) = J$ alors $\overrightarrow{QJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.

b. Construire alors le point Q.

10. Soit f l'application de P dans P qui à tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{HM}$, H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (OE).

    a. Caractériser f.

    b. Tracer (C') l'image de (C) par f.

    c. Donner la nature de la courbe (C').