

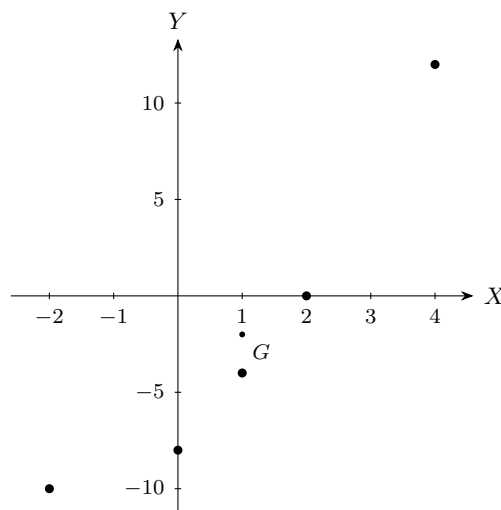
BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2012
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. $\bar{X} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{a+3}{5}$ et $\bar{Y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{b-6}{5}$. Les coordonnées du point moyen vérifient :

$$\begin{cases} \frac{a+3}{5} = 1 \\ \frac{b-6}{5} = -2 \end{cases} \quad \text{D'où } a = 2 \text{ et } b = -4.$$

2. a. La série est $\{(-2, -10), (0, -8), (1, -4), (2, 0), (4, 12)\}$.



b. Pour $a = 2$ et $b = -4$, $\bar{X} = 1$, $\bar{Y} = -2$. L'équation de la droite de régression linéaire de X en Y est $X = aY + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b = \bar{X} - a\bar{Y}$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{1}{5} ((-2)(-10) + 0(-8) + 1(-4) + 2 \times 0 + 4 \times 12) - 1 \times (-2) = 14,8 \\ V(Y) &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i^2 - \bar{Y}^2 = \frac{1}{5} ((-10)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 0^2 + 12^2) - (-2)^2 = 60,8 \end{aligned}$$

D'où $a = \frac{14,8}{60,8} = 0,243$ et $b = 1 - 0,243 \times (-2) = 1,486$. L'équation de la droite de régression linéaire de X en Y est $X = 0,243 Y + 1,486$.

Piège classique. Bien lire le sens de la régression : la droite de X en Y s'écrit $X = aY + b$ avec $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(Y)}$ — on divise par la variance de la variable *explicative* Y . Ce n'est pas la même droite que celle de Y en X (qui divise par $V(X)$).

c. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

$$V(X) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{5}((-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2) - 1^2 = 4.$$

D'où $\rho_{X,Y} = \frac{14,8}{\sqrt{4}\sqrt{60,8}} = 0,949$.

Interprétation. Le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1 : il existe une relation linéaire forte entre les variables X et Y . Le coefficient est également positif, cela signifie que lorsqu'une variable augmente, l'autre variable augmente aussi.

Exercice 2

1. a. Soit $z = re^{i\theta}$ une solution de l'équation (E).

$$z^2 = -8\sqrt{3} + 8i \iff r^2 e^{2i\theta} = 16e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^2 = 16 \\ 2\theta \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 4 \\ \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions : $z_1 = 4e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$ et $z_2 = 4e^{i(\frac{5\pi}{12} + \pi)} = 4\left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\right)\right) = 4\left(-\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$.

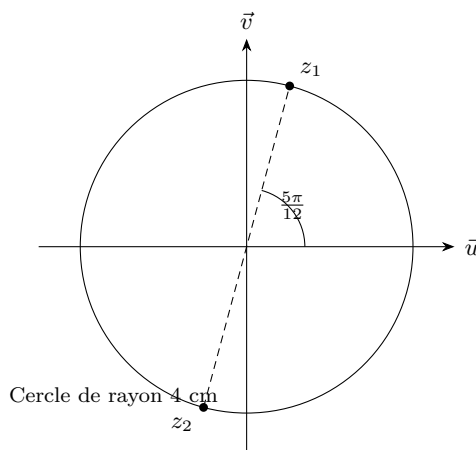
b. On cherche un nombre complexe $z = x+iy$ tel que $z^2 = -8\sqrt{3}+8i$. $x^2-y^2+2ixy = -8\sqrt{3}+8i$. Par identification, $x^2 - y^2 = -8\sqrt{3}$ et $xy = 4$. D'autre part, comme $|z|^2 = |-8\sqrt{3} + 8i|$, alors $x^2 + y^2 = 16$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 16 & (2) \\ xy = 4 & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), $x^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2$, d'où $x = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. En ajoutant (2) à $-(1)$, $y^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$, d'où $y = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ou $y = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$. L'équation (3) indique que x et y sont de même signe. Les solutions sont :

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6} - i(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

2.



3. De l'égalité $-\sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$, on déduit :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Méthode. Valeurs exactes de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ pour un angle inhabituel : résoudre la même équation $z^2 = \Delta$ de deux façons — forme *exponentielle* (qui donne l'angle) et forme *algébrique* (qui donne $x + iy$ en radicaux) — puis identifier les deux écritures d'une même racine.

Problème

Partie A

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double $r_0 = -1$. Donc la solution générale est $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2. u est de la forme $u(x) = (c_1x + c_2)e^{-x}$ avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

La solution particulière est la fonction u définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = (x + 1)e^{-x}$.

Partie B

3. La fonction $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ existe sur $] -\infty ; 0]$. La fonction $x \mapsto 1 - 2x + x \ln x$ existe si et seulement si $x > 0$. Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

4. Continuité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1)e^{-x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2x + x \ln x) = 1 = f(0)$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, f est continue en 0.

Dérivabilité en 0. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x + 1)e^{-x} - 1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2x + x \ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 + \ln x) = -\infty$. Comme cette dernière limite n'est pas une valeur finie, f n'est pas dérivable en 0.

5. f est dérivable sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$. Pour $x < 0$, $f'(x) = -xe^{-x} > 0$; pour $x > 0$, $f'(x) = \ln x - 1$ ($f'(x) \geq 0 \iff x \geq e$).

Tableau de variation $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^{-x} = -\infty \right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{2}{\ln x} + 1 \right) = +\infty$:

x	$-\infty$	0	e	α	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

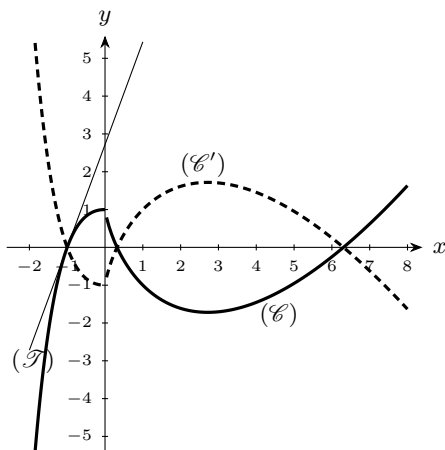
6. Point d'intersection avec l'axe des abscisses pour $x \leq 0$. Si $x \leq 0$, $f(x) = 0 \iff (x + 1)e^{-x} = 0 \iff x = -1$. Le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-1, 0)$.

Équation de la tangente. L'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ en ce point est $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$. D'où $(\mathcal{T}) : y = ex + e$.

7. $f(6) \approx -0,25$; $f(7) \approx 0,62$. f est continue, strictement croissante sur $]6 ; 7[$ et $f(6) \times f(7) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]6 ; 7[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

8. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right) = +\infty$. La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Partie C

9. a. Tableau de variation de h (où $h = -f$) :

x	$-\infty$	0		e	α	$+\infty$			
$h'(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$			
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-1+e$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. Voir graphique.

c. $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 [f(x) - h(x)] dx = 2 \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} dx$. Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors

$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$. Il vient, en intégrant par parties :

$$\mathcal{A} = 2 \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} dx = -2 \left[(1+x)e^{-x} \right]_{-1}^0 + 2 \int_{-1}^0 e^{-x} dx.$$

D'où $\mathcal{A} = 2(-2+e)$ u.a. $= 8(-2+e)$ cm².

Méthode. Aire entre deux courbes : $\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - h(x)] dx$ sur un intervalle où $f \geq h$ (sinon, découper aux points d'intersection). Le résultat est en unités d'aire : convertir ensuite avec 1 u.a. = (unité en abscisse) $\times$ (unité en ordonnée), ici $2 \times 2 = 4$ cm².