

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2013
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. En remplaçant z par -1 dans l'équation (E) , on vérifie que :

$$(-1)^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1) + 1 = 0.$$

2. Soit z_0 une solution de (E) . Le nombre z_0 est nécessairement non nul puisque 0 n'est pas solution de (E) .

$$\left(\frac{1}{z_0}\right)^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{z_0}\right) + 1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_0^2 + z_0^3}{z_0^3} = \frac{0}{z_0^3} = 0.$$

3. L'équation $(E') : z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$ admet pour discriminant $\Delta = -2 + \frac{3}{2}i$.

Cherchons $u = x + iy$ tel que $u^2 = -2 + \frac{3}{2}i$, soit $x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + \frac{3}{2}i$. Par identification : $x^2 - y^2 = -2$ et $xy = \frac{3}{4}$. D'autre part, $|u|^2 = \left|-2 + \frac{3}{2}i\right|$ donne $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 & (1) \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{2} & (2) \\ xy = \frac{3}{4} & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$; de même $y = -\frac{3}{2}$ ou $y = \frac{3}{2}$. L'équation (3) indique que x et y sont de même signe. D'où $\Delta = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2$. On en déduit que les racines de (E') sont : $z'_0 = 1 + i$ et $z''_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. En remarquant que $(z+1)\left(z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1\right) = z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 1$, on en déduit que les solutions de (E) sont : $\left\{-1, 1+i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$.

Méthode. Équation de degré 3 : repérer une racine évidente z_0 (souvent suggérée par l'énoncé, comme -1 ici), factoriser par $(z - z_0)$ en identifiant les coefficients du facteur de degré 2, puis résoudre l'équation du second degré restante (discriminant, éventuellement complexe).

Exercice 2

1.

$Y \setminus X$	-2	-1	0
-1	3	2	1
0	0	3	0
2	2	2	1

2. On note $(x_i, n_{i\bullet})$ les couples de la distribution marginale de X , et $(y_j, n_{\bullet j})$ ceux de Y . On a $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = N$.

Série marginale de X :

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	5	7	2

Série marginale de Y :

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	6	3	5

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{5(-2) + 7(-1) + 2(0)}{14} = -\frac{17}{14}, \quad \bar{Y} = \frac{6(-1) + 3(0) + 5(2)}{14} = \frac{2}{7}.$$

D'où le point moyen $G\left(-\frac{17}{14}; \frac{2}{7}\right)$.

3.

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{14} [5(-2)^2 + 7(-1)^2 + 2(0)^2] - \left(-\frac{17}{14}\right)^2 = \frac{89}{196}.$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^3 n_{\bullet j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{1}{14} [6(-1)^2 + 3(0)^2 + 5(2)^2] - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{87}{49}.$$

4.

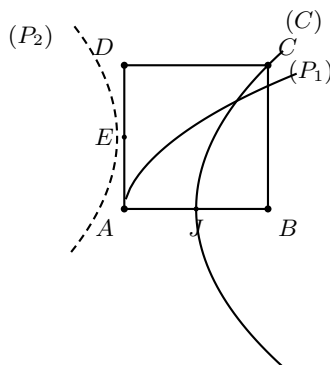
$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{1}{14} (3 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times (-4) + 2 \times (-2)) - \left(-\frac{17}{14}\right) \times \frac{2}{7} = \frac{3}{49}.$$

5. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}} = 0,068.$$

Rappel de cours. Le coefficient de corrélation linéaire vérifie toujours $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. Un ajustement affine n'est pertinent que si $|\rho|$ est proche de 1 (en pratique $|\rho| \gtrsim 0,87$) ; ici $\rho \approx 0,07$: il n'y a pas de corrélation linéaire entre X et Y .

Problème



1. $C \in (P_1)$ et D est le projeté orthogonal de C sur la directrice (AD) . Et (AC) , tangente en C à (P_1) , est également la médiatrice de $[BD]$. Donc B est le foyer de la parabole.

2. E est le symétrique du foyer B par rapport à la tangente (AD) à (P_2) . On en déduit que E est un point de la directrice de (P_2) . Or E est aussi le projeté orthogonal de $D \in (P_2)$ sur (EF) . Donc (EF) est la directrice de (P_2) .

3. B est le foyer de (P_2) et (EF) sa directrice. On en déduit que (BF) , perpendiculaire à (EF) passant par B , est son axe focal, donc son axe de symétrie. D'où H est le symétrique de D par rapport à (BF) .

4. $[DH]$ est un segment passant par le foyer B et dont les extrémités appartiennent à (P_2) . C'est une corde focale de (P_2) .

5. B est le foyer de (P_1) et (AD) sa directrice. On en déduit que (BE) , perpendiculaire à (AD) passant par B , est son axe focal, donc son axe de symétrie. Comme $C \in (P_1)$, alors I , symétrique de C par rapport à (BE) , appartient à (P_1) .

6. Voir figure.

7. $\theta = (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

8. $k = \frac{BA}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $[CI]$ corde focale de (P_1) est perpendiculaire à son axe focal ; $[DH]$ corde focale de (P_2) est perpendiculaire à son axe focal. On en déduit que $S([DH]) = [CI]$. Or la similitude conserve les milieux : comme B est le milieu de $[DH]$, alors $S(B)$ est le milieu de $[CI]$. D'où $S(B) = B$. Donc B est le centre de la similitude S .

10. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x+1}$.

Signe de f' : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$.

Tableau de variation ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0 ↗	$+\infty$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 0$. La courbe (C) admet une branche parabolique de direction $\overrightarrow{JB}$.

12. Voir figure.

Rappel de cours. Parabole de foyer F et de directrice (D) : dans le repère d'origine le sommet (milieu entre foyer et directrice), l'équation réduite est $y^2 = 2px$, où p est la distance du foyer à la directrice. Le sommet est le seul point de la parabole situé sur l'axe focal.

13. p étant la distance du foyer à la directrice, on a $p = AB = 2$. L'équation cartésienne de (P_1) est alors $y^2 = 2px = 4x$. On en déduit que (P_1) est la réunion de deux courbes symétriques par rapport à (JB) : $y_1(x) = 2\sqrt{x}$ et $y_2(x) = -2\sqrt{x}$. D'où l'aire de la portion :

$$\int_0^1 (f(x) - y_1(x)) dx = \int_0^1 (2\sqrt{x} + \ln(x+1) - 2\sqrt{x}) dx = [(x+1)\ln(x+1) - x]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$