Sujet bac 2013 – Série C

Exercice 1 *4 points*

On considère l'équation complexe (E) telle que

$$(E) : z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z + 1 = 0$$

1. Montrer que -1 est solution de (E).
2. Démontrer que si z_0 est solution de (E) alors son inverse $\dfrac{1}{z_0}$ est aussi solution de (E).
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que $(E') : z^2 - \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) z + 1 = 0$.
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 *4 points*

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau ci-dessous.

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

1. Transformer ce tableau en un tableau à double entrée d'effectifs n_i.
2. Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
3. Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y.
4. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Problème *12 points*

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90°$ et $AD = 2$. On désigne par (P_1) la parabole de directrice la droite (AD) et tangente en C à la droite (AC).

1. Démontrer que le foyer de (P_1) est B.

Soit (P_2) la parabole de foyer B et tangente à la droite (AD) en D, E le symétrique de B par rapport à A, F le symétrique de D par rapport à la droite (AB).

2. Démontrer que la droite (EF) est la directrice de (P_2).
3. Construire le deuxième point H de (P_2) appartenant à la droite (DB).
4. Comment appelle-t-on le segment $[DH]$ pour la parabole (P_2) ? Justifier la réponse.
5. Démontrer que le point I symétrique de C par rapport à (BE) appartient à (P_1).
6. Construire les arcs des paraboles (P_1) et (P_2) de cordes respectives $[CI]$ et $[DH]$.

Soit S la similitude plane directe qui transforme (P_2) en (P_1).

7. Déterminer une mesure θ de l'angle de S. Justifier la réponse.
8. Déterminer son rapport k. Justifier la réponse.
9. Déterminer son centre. Justifier la réponse.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ où J est le milieu de $[AB]$, on considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} + \ln(x + 1)$. (C) désigne sa courbe représentative dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.

10. Dresser le tableau de variation de f.
11. Étudier la branche infinie de (C).
12. Construire (C) dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$.
13. Calculer l'aire de la portion du plan (E) limitée par les droites (JO), (BC) et les courbes (C) et (P_1). On montrera que l'équation cartésienne de (P_1) dans le repère $(J, \overrightarrow{JB}, \overrightarrow{JO})$ est $y^2 = 4x$.