

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2013
Corrigé détaillé

Exercice 1

On note $(x_i, n_{i\bullet})$ les couples de la distribution marginale de X , et $(y_j, n_{\bullet j})$ ceux de Y . On a $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = N = 19$.

1.

X	-2	-1	0
$n_{i\bullet}$	6	8	5

Y	-1	0	2
$n_{\bullet j}$	9	6	4

2. $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^3 n_{i\bullet} x_i = \frac{6(-2) + 8(-1) + 5(0)}{19} = -\frac{20}{19}$; $\bar{Y} = \frac{9(-1) + 6(0) + 4(2)}{19} = -\frac{1}{19}$.
 Le point moyen est $G\left(-\frac{20}{19}, -\frac{1}{19}\right)$.

3. L'équation de régression de Y en X est $Y = aX + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \bar{Y} = \frac{8 + 0 - 8 + 3}{19} - \frac{20}{19^2} = \frac{37}{361}$$

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_i n_{i\bullet} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{6(-2)^2 + 8(-1)^2 + 5(0)^2}{19} - \left(\frac{20}{19}\right)^2 = \frac{208}{361}$$

Ainsi $a = \frac{37/361}{208/361} = \frac{37}{208}$ et $b = -\frac{1}{19} - \frac{37}{208} \cdot \frac{-20}{19} = \frac{7}{52}$. D'où $Y = \frac{37}{208}X + \frac{7}{52}$.

4. $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ avec $V(Y) = \frac{9(-1)^2 + 6(0)^2 + 4(2)^2}{19} - \left(\frac{1}{19}\right)^2 = \frac{474}{361}$. D'où $\rho_{X,Y} = \frac{37/361}{\sqrt{208/361}\sqrt{474/361}} = 0,117$.

Exercice 2

1. Posons $Z = r e^{i\theta}$.

$$Z^3 = -8 \iff r^3 e^{i3\theta} = 8 e^{i\pi} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$; $z_1 = 2e^{i\pi} = -2$; $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$.

Méthode. Équation $Z^n = a$: passer en forme exponentielle. De $r^n e^{in\theta} = |a| e^{i \arg a}$ on tire $r = \sqrt[n]{|a|}$ et $\theta_k = \frac{\arg a}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$: les n solutions ont le même module et leurs images forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon r .

2. a. $U = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $|U| = 1$ et $\arg(U) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

b. Comme $|U| = 1$, alors $AC = AB$. De plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(U) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Le triangle ABC est isocèle en A avec un angle de $\frac{\pi}{3}$: c'est un triangle équilatéral.

3. a. Soit $Z' = aZ + b$ l'expression de la rotation S .

$$\begin{cases} S(A) = C \\ S(C) = B \end{cases} \iff \begin{cases} Z_C = aZ_A + b \\ Z_B = aZ_C + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et $b = Z_C - aZ_A = 1 - i\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) = 0$. D'où $Z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$.

b. $Z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}Z$: S est la rotation de centre O (affixe 0) et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

Rappel de cours. Lecture de $z' = az + b$ ($a \neq 0$) : si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, c'est une rotation d'angle $\arg a$; si a est réel ($\neq 0, 1$), une homothétie de rapport a ; sinon une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$. Le centre est le point fixe, solution de $z = az + b$.

Problème

Partie A

1. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{2x^2 + 1}{x} < 0$ pour tout $x > 0$. Avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
g	$+\infty$	$\searrow -\infty$

2. g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(1) = 0$. Donc $g(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et $g(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

Partie B

1. $x \mapsto 1 + x - e^{1-x}$ existe sur $] -\infty; 1]$; $x \mapsto \frac{2x - x^2 + \ln x}{x}$ existe sur $]1; +\infty[$. Donc $E_f = \mathbb{R}$.

2. a. Continuité en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, donc f est continue en 1.

Dérivabilité en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{e^u - 1}{u} = 2$ (avec $u = 1 - x$) ;
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x(x - 1)} = 0$. Les deux limites diffèrent : f n'est pas dérivable en 1.

b. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3. f est dérivable sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$: $f'(x) = 1 + e^{1-x}$ sur $] -\infty; 1[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ sur $]1; +\infty[$.

Signe : $f'(x) > 0$ sur $] -\infty; 1[$; $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$. Avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$:

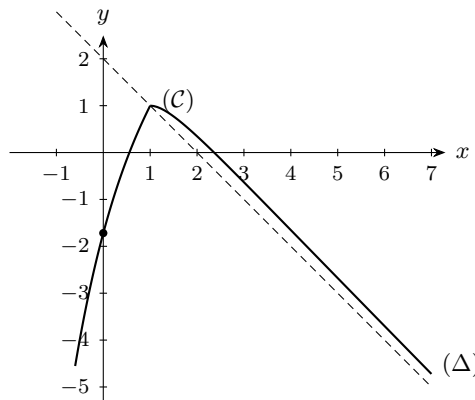
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ $\parallel$ $-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\searrow$	$-\infty$

4. (Δ) asymptote : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2 - x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc (Δ) : $y = -x + 2$ est asymptote en $+\infty$. Comme $f(x) - (2 - x) = \frac{\ln x}{x} > 0$ pour $x > 1$, ($\mathcal{C}$) est au-dessus de (Δ).

5. Tangente en $x = 0$: $y = f'(0)x + f(0)$, soit (T) : $y = (1 + e)x + 1 - e$.

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$: branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. En $+\infty$, (Δ) : $y = 2 - x$ est asymptote oblique.

7.



8. $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_{3/2}^e (f(x) - (2 - x)) dx = \int_{3/2}^e \frac{\ln x}{x} dx$. Par parties (ou en reconnaissant la dérivée de $\frac{1}{2}(\ln x)^2$) :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_{3/2}^e = \frac{1 - \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}{2} \text{ u.a} = 2 \left[1 - \left(\ln \frac{3}{2}\right)^2 \right] \text{ cm}^2.$$

Méthode. Avant toute intégration par parties, chercher une forme $u'u^n$: ici $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = u'u$ avec $u = \ln x$, de primitive $\frac{u^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$. Reconnaitre ces formes ($u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$) fait gagner un temps précieux.