Sujet bac 2013 – Série D

Exercice 1 *4 points*

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau à double entrée ci-après :

$X \setminus Y$	-1	0	2
-2	4	0	2
-1	3	5	0
0	2	1	2

1. Dresser la loi marginale de X et celle de Y.
2. Trouver les coordonnées du point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

Exercice 2 *4 points*

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $Z^3 + 8 = 0$. On donnera les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Soit A, B, et C les points d'affixes des complexes : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -2$; $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

2. a. Calculer le module et un argument de U tel que : $U = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

Soit S, la rotation définie dans (P) telle que : $S(A) = C$ et $S(C) = B$.

3. a. Déterminer l'expression complexe de S.

   b. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Problème *12 points*

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$$

1. Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2. Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (C), la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique : 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 1$.
   b. Pour $x \in]1\,;+\infty[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2 - x$ est asymptote à la courbe (C) de la fonction f et étudier la position de la droite (Δ) par rapport à cette courbe.
5. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f en $x = 0$.
6. Étudier les branches infinies de la courbe (C) de la fonction f.
7. Construire dans le même repère, la courbe (C) de f, la droite (Δ) et la tangente (T).
8. Calculer l'aire $\mathcal{A}(D)$ du domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (Δ) et les axes $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = e$. On prendra $\ln 2 \approx 0{,}7$; $e \approx 2{,}7$.