

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2014
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. L'équation $(E) : Z^2 - (2ie^{i\theta} \cos \theta)Z - e^{i2\theta} = 0$ admet pour discriminant réduit :

$$\Delta' = (ie^{i\theta} \cos \theta)^2 - 1 \times (-e^{i2\theta}) = e^{2i\theta}(-\cos^2 \theta + 1) = (e^{i\theta} \sin \theta)^2.$$

On en déduit que les racines de (E) sont :

$$\begin{aligned} Z_1 &= ie^{i\theta} \cos \theta - e^{i\theta} \sin \theta = e^{i\theta} i(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\theta} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)} \\ Z_2 &= ie^{i\theta} \cos \theta + e^{i\theta} \sin \theta = e^{i\theta} i(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{i\theta} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

2. a. $\arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right) = \arg\left(\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \arg(e^{i2\theta}) \equiv 2\theta [2\pi].$

b. Comme $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right) [2\pi]$, alors $2\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. D'où $\theta \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$. L'ensemble des valeurs de θ est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c.

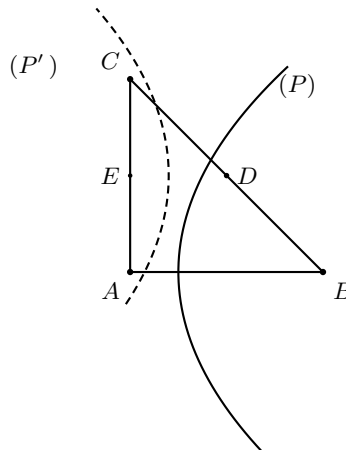
$$\begin{aligned} Z_A + Z_B &= e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)} = e^{i\frac{\pi}{2}}(1 + e^{i2\theta}) = e^{i\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}(2 \cos^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cos \theta(\cos \theta + i \sin \theta) = 2 \cos \theta e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)} \end{aligned}$$

On a $|Z_A + Z_B| = |2 \cos \theta| = 2 \cos \theta$ car $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. On en déduit que $2 \cos \theta e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ est la forme exponentielle de $Z_A + Z_B$. Donc la forme exponentielle de $\overline{Z_A + Z_B}$ est $2 \cos \theta e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

Méthode. Technique de l'angle moitié : pour écrire $1 + e^{i\alpha}$ sous forme exponentielle, factoriser par $e^{i\alpha/2}$: $1 + e^{i\alpha} = e^{i\alpha/2}(e^{-i\alpha/2} + e^{i\alpha/2}) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\alpha/2}$. Elle évite les identités trigonométriques et s'adapte à $1 - e^{i\alpha}$ (avec un sinus).

Exercice 2

1.



2. a. On appelle paramètre p d'une parabole la distance du foyer de cette parabole à sa directrice.

b. AB étant la distance du foyer B à la directrice (AC) , alors $\alpha = AB = 6$ cm.

3. a. • B est le foyer de (P) ; • $G \in (P)$ car C est le projeté orthogonal de G sur la directrice (AC) et $GB = GC$; • de plus, (AG) est la médiatrice de $[BC]$. Donc (AG) est la tangente à (P) en G .

b. Notons H_1 le projeté orthogonal de H sur la directrice (AC) et H_0 le milieu de $[EB]$. On a $HH_1 = H_0A$. Or $HH_1 = HB$ car $H \in (P)$. Donc $HB = H_0A$. On en déduit que H est l'un des points d'intersection de la médiatrice de $[EB]$ et du cercle de centre B de rayon H_0A .

c. $E \in (P)$. Les points G et H ainsi que leurs symétriques I et H' par rapport à l'axe focal (AB) sont des points de (P) . À partir de ces 5 points, on obtient une allure de l'arc (P_0) .

4. S est la similitude de centre B , de rapport $K = \frac{BA}{BD} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ et d'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

5. Comme $S(B) = B$ et $S(J) = G$, alors $BG = \sqrt{2}BJ$ et $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. On en déduit que le triangle BJG est rectangle isocèle en J . J est donc le point d'intersection du cercle de diamètre $[BG]$ et de la médiatrice de $[BG]$ tel que l'angle $(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG})$ soit orienté positivement.

6. Pour construire l'arc (P'_0) , on applique le même procédé qu'en 3.b. Soit H'_0 le milieu de $[BF]$. Les points d'intersection K et K' du cercle de centre B de rayon $[H'_0D]$ et de la médiatrice de $[BF]$ appartiennent à (P') . À l'aide des cinq points K, K', F, J et J' (où J' est le symétrique de J par rapport à l'axe focal (BD)), on construit une allure de l'arc (P'_0) .

7. Toute similitude de rapport k multiplie l'aire de sa transformée par k^2 . Comme S est de rapport $\sqrt{2}$ et $S((E'_0)) = (E_0)$, alors $A_0 = (\sqrt{2})^2 A'_0 = 2A'_0$.

8. $S \circ S \circ S \circ S$ est la similitude de centre B , de rapport $(\sqrt{2})^4 = 4$. D'où $A = 4^2 A'_0 = 16 \times \frac{1}{2} A_0 = 8A_0$.

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{-x}x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'où $E_{f_n} = \mathbb{R}$.

2. a. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = (-e^{-x})x^{n+1} + e^{-x}(n+1)x^n = (-x+n+1)e^{-x}x^n$. L'entier n étant impair, x^n est de même signe que x . D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$n+1$	$+\infty$
$-x+n+1$	$+$	$+$	0	$-$
$e^{-x}x^n$	$-$	0	$+$	$+$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	0
				$-$

b. $n+1$ étant pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{n+1} = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}x^{n+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}x^{n+1} = 0$.

c. Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$n+1$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$	0
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$
			$\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$	$\searrow$
				0

3. a. En posant $u'(x) = e^{-x}$, $v(x) = x^{n+2}$, donc $u(x) = -e^{-x}$, $v'(x) = (n+2)x^{n+1}$, on a en intégrant par parties :

$$I_{n+1,p} = \int_0^p e^{-x} x^{n+2} dx = \left[-e^{-x} x^{n+2} \right]_0^p + (n+2) \int_0^p e^{-x} x^{n+1} dx = -e^{-p} p^{n+2} + (n+2) I_{n,p}.$$

Par passage à la limite : $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n+1,p} = \underbrace{\lim_{p \rightarrow +\infty} (-e^{-p} p^{n+2})}_{=0} + (n+2) \lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n,p}$. D'où $J_{n+1} = (n+2)J_n$.

Rappel de cours. Croissances comparées : pour tout entier k , $\lim_{p \rightarrow +\infty} p^k e^{-p} = 0$ — l'exponentielle l'emporte sur toute puissance. C'est ce résultat qui annule le terme tout intégré de l'intégration par parties.

b. $J_n = (n+1)J_{n-1} = (n+1) \times nJ_{n-2} = \dots = (n+1) \times n \times \dots \times 2 \times J_0 = (n+1)! J_0$.

Exercice 4

1. Pour tous nombres n et p de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, X est la variable aléatoire qui à tout tirage (n, p) où $n \neq p$, associe $|n - p|$.

$p \setminus n$	1	2	3	4
1		1	2	3
2	1		1	2
3	2	1		1
4	3	2	1	

Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Méthode. Loi d'une variable aléatoire sur un univers fini : recenser d'abord *toutes* les issues équiprobables dans un tableau à double entrée (ici les 12 couples (n, p) avec $n \neq p$), lire la valeur de X sur chaque case, puis compter les cas favorables à chaque valeur. Contrôle utile : la somme des probabilités doit valoir 1.

2. $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p(X = x_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p(X = x_i) - (E(X))^2 = 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$