

Sujet bac 2014 – Série C

Exercice 1

4 points

1. Soit (E) l'équation d'inconnue Z :

$$Z^2 - (2i e^{i\theta} \cos \theta)Z - e^{i2\theta} = 0 \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) . On présentera les solutions sous forme exponentielle.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}$. On note Z_0 l'affixe de O .
- Exprimer $\arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right)$ en fonction de θ .
 - En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - On suppose que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 2

8 points

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 6$ cm. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[BD]$.

1. Faire la figure.

Soit (P) la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC) .

2. a. Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?
b. Déterminer le pas α de (P) .

Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC) .

3. a. Démontrer que la droite (AG) est une tangente à (P) en un point à déterminer.
b. Construire le point H de (P) situé sur la médiatrice du segment $[EB]$.
c. Construire l'arc (P_0) de (P) de corde focale le segment $[GI]$ où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB) .

Soit (P') la parabole de foyer B et de directrice (AG) .

4. Déterminer le centre Ω , le rapport K et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S qui transforme (P') en (P) .
5. Construire l'antécédent J de G par S .
6. Construire l'arc (P'_0) qui a pour image (P_0) par S .

On désigne par A'_0 l'aire de la portion (E'_0) du plan limitée par les droites (JB) , (EF) et (P'_0) , et par A_0 celle de la portion du plan (E_0) image de (E'_0) par S .

7. Démontrer que $A_0 = 2A'_0$.
8. Déterminer l'aire A de $S \circ S \circ S \circ S(E'_0)$ en fonction de A_0 .

Exercice 3

4 points

Soit la fonction :

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f_n(x) = e^{-x} x^{n+1} \end{array} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n .
2. On suppose que n est impair.
 - a. Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
 - b. Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n} .
 - c. Dresser le tableau de variation de f_n .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \int_0^p f_n(x) dx$ et $J_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} I_{n,p}$.
 - a. En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n+2)J_n$.
 - b. En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0 .

Exercice 4

4 points

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.

La variable aléatoire X est celle qui détermine « la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis ».

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .