

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2014
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. Soit $z = x + iy$. Le conjugué de z est $\bar{z} = x - iy$.

2. a. Posons $Z = r e^{i\theta}$.

$$Z^3 = 1 \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où $z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Les solutions non réelles sont conjuguées : $\bar{z}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2$.

3. On remarque que $Z_1 = 2z_2$, donc $Z_1^3 = 2^3 z_2^3$. Or $z_2^3 = 1$, d'où $Z_1^3 = 8$.

4. a. Si z est solution de (E) , alors $z^3 = 1$, donc $(2z)^3 = 8$: $2z$ est solution de (E') . Les solutions de (E') sont les doubles de celles de (E) : $z'_0 = 2$; $z'_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z'_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

Méthode. Réutiliser une équation déjà résolue : pour résoudre $Z^3 = 8$, poser $Z = 2z$ ramène à $z^3 = 1$, dont les solutions sont connues. De façon générale, $Z^n = a$ se déduit des racines n -ièmes de l'unité en les multipliant par une solution particulière.

b. Comme $z_1^3 = z_2^3 = 8$, alors $\left(\frac{z'_1}{z'_2}\right)^3 = \frac{8}{8} = 1$: $\frac{z'_1}{z'_2}$ est solution de (E) .

Exercice 2

1. $f(\vec{i})$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$, donc $f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k}$. De même $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ et $f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$.

2. Matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. a. Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel si : (i) $\mathcal{E} \neq \emptyset$; (ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}$, $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{E}$; (iii) $\forall \vec{u} \in \mathcal{E}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{u} \in \mathcal{E}$.

b. (i) $(0, 0, 0) \in \mathcal{H}$ car $0 - 0 + 0 = 0$, donc $\mathcal{H} \neq \emptyset$. (ii) Si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z') \in \mathcal{H}$: $(x + x') - (y + y') + (z + z') = (x - y + z) + (x' - y' + z') = 0$, donc $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{H}$. (iii) $\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda(x - y + z) = 0$, donc $\lambda \vec{u} \in \mathcal{H}$.

Méthode. Sous-espace vectoriel : toujours vérifier les trois points dans cet ordre — le vecteur nul appartient à l'ensemble (donc il est non vide), stabilité par somme, stabilité par multiplication par un réel. Si le vecteur nul n'y est pas, inutile d'aller plus loin : ce n'est pas un sous-espace.

4. (x, y, z) appartient au noyau de f ssi $f(x, y, z) = \vec{0}$:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \end{cases}$$

Un vecteur du noyau s'écrit $(0, y, -y) = y(0, 1, -1)$. Le noyau est la droite vectorielle engendrée par $\vec{e}_1 = (0, 1, -1)$.

5. (x', y', z') est dans l'image ssi il existe (x, y, z) avec $y + z = x'$, $x + y + z = y'$, $x = z'$. On relève $x' - y' + z' = 0$, soit $y' = x' + z'$. D'où $(x', y', z') = x'(1, 1, 0) + z'(0, 1, 1)$: l'image de f est le plan engendré par $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$, d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 3

1. Comme $e^x + 1 \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1} - x$ existe sur $\mathbb{R}$. Donc $E_g = \mathbb{R}$.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} < 0$.

3. Avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
g	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

4. g est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et $0 \in]-\infty; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $g(\alpha) = 0$, soit $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$: α est solution de $\frac{e^x}{e^x + 1} = x$.

5. a. $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 1$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$		+
h	0	$\nearrow$ 1

c. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} h = 0$, $\lim_{+\infty} h = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$.

6. a. $\forall n, u_n \leq 1$ (récurrence) : $u_0 = 0 \leq 1$ et $u_1 = h(u_0) = \frac{1}{2} \leq 1$. Si $u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} = h(u_n) \leq 1$ (d'après 5.c.). Donc $u_n \leq 1$ pour tout n .

b. (u_n) croissante : $u_0 = 0 \leq u_1 = \frac{1}{2}$. Si $u_n \leq u_{n+1}$, comme h est croissante, $h(u_n) \leq h(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc (u_n) est croissante.

c. (u_n) est croissante et majorée par 1, donc convergente.

Méthode. Suite définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ avec h croissante sur un intervalle stable : la suite est monotone, dans le sens donné par la comparaison de u_0 et u_1 (ici $u_0 \leq u_1$ donc croissante, par récurrence). Croissante et majorée, elle converge — et sa limite est un point fixe de h .

$\lim u_n = \alpha$: (i) Pour $x \in [0; 1]$: $e^x \geq 1$, $(e^x + 1)^2 \geq 4$, et $e^x \leq e$, d'où $0 < h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{e}{4}$.
(ii) Par l'inégalité des accroissements finis, $|h(x) - h(y)| \leq \frac{e}{4}|x - y|$ sur $[0; 1]$; comme $h(\alpha) = \alpha$ et $u_n, \alpha \in [0; 1]$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e}{4}|u_n - \alpha|$. (iii) Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Comme $\frac{e}{4} < 1$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4

On note $(x_i, n_{i\bullet})$ et $(y_j, n_{\bullet j})$ les distributions marginales, avec $N = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$.

1. Séries marginales :

x	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	a	2

y	1	3
$n_{\bullet j}$	3	$a+2$

2. $\bar{x} = \frac{3(-1) + a(0) + 2(2)}{a+5} = \frac{1}{5+a}$; $\bar{y} = \frac{3(1) + (a+2)(3)}{5+a} = \frac{3a+9}{a+5}$. On cherche a tel que $\bar{x} = \frac{1}{6}$ et $\bar{y} = 2$: d'où $a = 1$.

3. Pour $a = 1$: $\bar{x} = \frac{1}{6}$, $\bar{y} = 2$.

$$V(x) = \frac{3(-1)^2 + 1(0)^2 + 2(2)^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{65}{36} ; \quad V(y) = \frac{3(1)^2 + 3(3)^2}{6} - 2^2 = 1$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{-1 - 6 + 0 + 0 + 4 + 0}{6} - \frac{1}{6} \times 2 = -\frac{5}{6}$$

Le coefficient de corrélation linéaire est $\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} = \frac{-5/6}{\sqrt{65/36}} = -\frac{5}{\sqrt{65}} \approx -0,62$.