Sujet bac 2014 – Série D

Exercice 1 *5 points*

1. Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
2. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E) : Z^3 = 1$. On donnera les résultats sous forme algébrique.

   b. Justifier que les solutions sont deux à deux conjuguées.

   Modification : Il s'agit plutôt de montrer que les solutions non réelles sont conjuguées entre elles.
3. Montrer que $Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ est solution de l'équation $(E') : Z^3 = 8$.
4. Soit z'_0, z'_1, z'_2 les solutions de (E') où z'_1 et z'_2 sont deux complexes conjugués.

   a Utiliser les solutions de (E) pour déduire les solutions de l'équation (E').

   b Montrer que $\dfrac{z'_1}{z'_2}$ est solution de (E).

Exercice 2 *5 points*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ qui associe à tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, l'élément (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$, $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
3. a. Quelles conditions faut-il remplir pour qu'un ensemble $\mathcal{E}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

   b. Montrer alors que l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\vec{e_1})$.
5. Déterminer l'image de f, puis une base $\mathcal{B} = (\vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Exercice 3 *7 points*

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère la fonction g de la variable réelle x, définie par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - x$$

1. Préciser l'ensemble de définition de g.
2. Déterminer $g'(x)$, la fonction dérivée de g puis en déduire son signe.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = x$ admet une solution unique $\alpha \in]-\infty\,; +\infty[$.
5. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Unité graphique 2 cm.

a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) > 0$.

b. Dresser le tableau de variation de h.

c. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$.

6. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (u_n) est croissante.

c. En déduire la convergence de (u_n), puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4 *3 points*

On considère la série statistique (x, y) définie par le tableau suivant :

$x \setminus y$	1	3
-1	1	2
0	0	a
2	2	0

1. Déterminer les séries marginales de x et y.
2. Déterminer le réel a pour que l'on ait $G\left(\frac{1}{6}, 2\right)$ où G désigne le point moyen de la série (x, y).
3. On donne $a = 1$. Calculer la variance de x, la variance de y et la covariance de la série (x, y).