

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2015
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. Les nombres 21 et 17 étant premiers entre eux, $\text{PGCD}(21; 17) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $21x_0 + 17y_0 = 1$. En multipliant par 4 : $21(4x_0) - 17(-4y_0) = 4$. On en déduit que $(4x_0, -4y_0)$ est solution de (E) . Donc (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b.

$$\begin{aligned} 21x - 17y = 4 &\iff 21x - 4 = 17y \text{ avec } y \text{ entier} \\ &\iff 21x - 4 \text{ est un multiple de } 17 \\ &\iff 21x - 4 \equiv 0 [17] \iff 21x \equiv 4 [17] \end{aligned}$$

Les équations (E) et (E') sont équivalentes.

2. a. L'algorithme d'Euclide appliqué à 21 et 17 donne : $21 = 17 \times 1 + 4$, $17 = 4 \times 4 + 1$. En remontant :

$$1 = 17 - 4 \times 4 = 17 - (21 - 17 \times 1) \times 4 = 17 \times 5 - 21 \times 4$$

On en déduit que $21 \times (-4) = 1 + 17 \times (-5)$, par conséquent $21 \times (-4) \equiv 1 [17]$. Donc l'inverse de 21 modulo 17 est -4 .

Rappel de cours. Inverse modulaire : a admet un inverse modulo n si et seulement si $\text{pgcd}(a, n) = 1$. On le trouve par l'identité de Bézout : de $au + nv = 1$ on tire $au \equiv 1 [n]$, donc u est l'inverse de a . Il permet de « diviser » dans une congruence : $ax \equiv b [n] \iff x \equiv ub [n]$.

b. Comme $21 \times (-4) \equiv 1 [17]$, on en déduit $21 \times (-16) \equiv 4 [17]$. Donc -16 est une solution particulière de (E') . Soit x une solution de (E') :

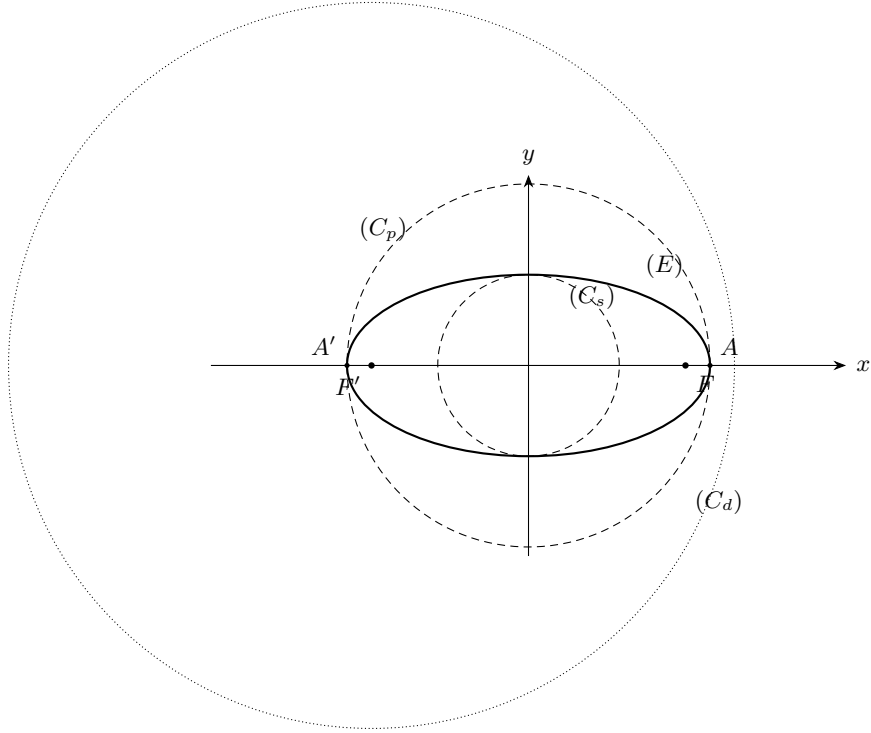
$$\begin{cases} 21x \equiv 4 [17] \\ 21 \times (-16) \equiv 4 [17] \end{cases} \iff 21x \equiv 21 \times (-16) [17] \iff 21(x + 16) \equiv 0 [17] \iff 17 \mid 21(x + 16).$$

Comme 17 est premier avec 21, d'après Gauss, 17 divise $x + 16$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 16 = 17k$. D'où $x = -16 + 17k = 1 + 17(k - 1) = 1 + 17k'$. Les solutions de (E') sont $\{1 + 17k; k \in \mathbb{Z}\}$.

3. En remplaçant x par $1 + 17k$ dans (E) : $21x - 17y = 4$, on obtient $y = 1 + 21k$. Les solutions de (E) sont $\{(1 + 17k; 1 + 21k); k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2

1.



2. L'axe focal est la droite perpendiculaire à la directrice (AD) passant par le foyer B . C'est par conséquent la droite (AB) .

3. a. Les points S_1 et S_2 à déterminer sont les sommets de l'ellipse. Soit S un sommet de l'ellipse (E) d'excentricité $\frac{1}{2}$:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{1}{2} \iff 4SB^2 - SA^2 = 0 \iff (2\vec{SB} - \vec{SA}) \cdot (2\vec{SB} + \vec{SA}) = 0.$$

Comme A, B, S sont alignés, alors $2\vec{SB} + \vec{SA} = \vec{0}$ ou $2\vec{SB} - \vec{SA} = \vec{0}$.

S tel que $2\vec{SB} + \vec{SA} = \vec{0}$: $2\vec{SB} = -\vec{SA} \Leftrightarrow 2\vec{SB} = -\vec{SB} - \vec{BA} \Leftrightarrow \vec{BS} = \frac{1}{3}\vec{BA}$. Le premier sommet vérifie $\vec{BS}_1 = \frac{1}{3}\vec{BA}$.

S tel que $2\vec{SB} - \vec{SA} = \vec{0}$: $2\vec{SB} = \vec{SA} \Leftrightarrow 2\vec{SB} = \vec{SB} + \vec{BA} \Leftrightarrow \vec{BS} = -\vec{BA}$. Le second sommet vérifie $\vec{BS}_2 = -\vec{BA}$.

b. Voir figure. À partir des sommets S_1 et S_2 , on construit le centre Ω (milieu de $[S_1S_2]$) et le second foyer B' , symétrique de B par rapport à Ω .

4. Le cercle principal (C_p) de (E) est le cercle de centre Ω et de rayon le demi-grand axe ΩS_1 .

5. Soit S_3 le point d'intersection de l'axe non focal et du cercle de centre B et de rayon le demi-grand axe ΩS_1 . S_3 vérifie $\Omega S_1^2 = BS_3^2 = B\Omega^2 + \Omega S_3^2$. C'est donc un sommet de l'ellipse et ΩS_3 est le demi-petit axe. Le cercle secondaire (C_s) est le cercle de centre Ω et de rayon le demi-petit axe ΩS_3 .

6. Le cercle directeur relatif au foyer B est le cercle de centre B et de rayon le grand axe S_1S_2 .

7. Soit P le point d'intersection de la demi-droite $[BC)$ et du cercle directeur (C_d) . Le point de (E) situé sur $[BC)$ est le point d'intersection de $[BC)$ et de la médiatrice de $[B'P]$ (où B' est le second foyer). En effet, notons Q ce point : comme Q est sur la médiatrice de $[PB']$, alors $QB' = QP$. D'où $QB' + QB = QP + QB = PB = 2\Omega B$, ce qui prouve que Q appartient à l'ellipse (E) .

8. Voir figure.

9. a. On appelle symétrie glissée toute transformation qui peut s'écrire comme la composée commutative d'une translation et d'une réflexion d'axe dirigé par le vecteur de la translation.

b. Comme f est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe, alors f est une symétrie glissée.

Vecteur : $f(A) = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}(A) = S_{(AC)}(B) = D$; $f(D) = S_{(AC)}(C) = C$. Comme $f \circ f(A) = C$, le vecteur de la symétrie glissée est $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

Axe : Comme $f(A) = D$, l'axe est la droite dirigée par $\overrightarrow{OC}$ passant par le milieu de $[AD]$, c'est-à-dire la droite (JI) .

c. Voir figure.

Exercice 3

1. Comme $f(\alpha) = 0$, alors $1 - \alpha \ln \alpha = 0$. On en déduit que $\alpha = e^{\frac{1}{\alpha}}$. D'où $\alpha = g(\alpha)$: α est solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in I$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Initialisation : $u_0 = 2 \in I$ et $u_1 = e^{\frac{1}{2}} \in I$. Donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité : Supposons $u_n \in I$, soit $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3}$. Par croissance de l'exponentielle, $e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{u_n}} \leq e^{\frac{2}{3}}$. Or $e^{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$ et $e^{\frac{2}{3}} < 2$. D'où $u_{n+1} = e^{\frac{1}{u_n}} \in I$. $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. g est continue et dérivable sur I , et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in I$. D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis : $\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$. En prenant $y = \alpha \in I$ et puisque $g(\alpha) = \alpha$: $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité en $x = u_n \in I$: $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or $g(u_n) = u_{n+1}$, d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $\mathcal{P}_n$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Initialisation : comme $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$, alors $0 \leq 2 - \alpha \leq \frac{1}{2}$, donc $|u_0 - \alpha| = 2 - \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$. Hérédité : d'après 4.a. et l'hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Par passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

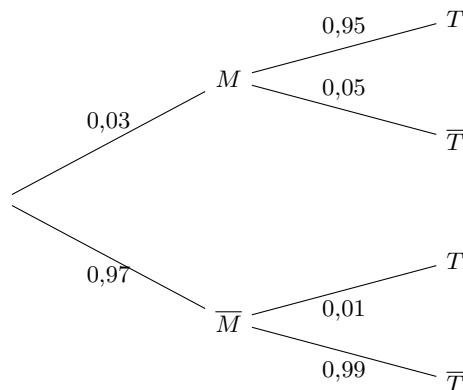
Méthode. Canevas du point fixe, très fréquent au bac : **1)** montrer par récurrence que u_n reste dans un intervalle stable I ; **2)** majorer $|g'|$ par $k < 1$ sur I et appliquer l'inégalité des accroissements finis : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$; **3)** en déduire par récurrence $|u_n - \alpha| \leq k^n|u_0 - \alpha|$ et conclure ($k^n \rightarrow 0$). La même majoration fournit le rang n_0 garantissant une précision donnée.

5. a. On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \leq 10^{-1}$. Par croissance du logarithme, $n_0 \ln \frac{1}{2} \leq -\ln 10$, d'où $n_0 \geq \frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$. On peut prendre $n_0 = 4$.

b. $u_1 = g(u_0) \approx 1,6487$; $u_2 \approx 1,834$; $u_3 \approx 1,725$; $u_4 \approx 1,7855$. $u_4 \approx 1,786$ est une valeur approchée de α .

Exercice 4

1.



2. $p(M \cap T) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285$. $p(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,97 \times 0,99 = 0,9603$.

3. $p(T) = 0,03 \times 0,95 + 0,97 \times 0,01 = 0,0382$. $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 0,9618$.

Rappel de cours. Probabilités totales : si $\{M, \overline{M}\}$ partitionne l'univers, alors $p(T) = p(M)p(T/M) + p(\overline{M})p(T/\overline{M})$ — sur l'arbre, on additionne les chemins qui mènent à T . La question suivante « renverse » le conditionnement : $p(\overline{M}/T) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)}$ (formule de Bayes).

4. a. $p(\overline{M}/T) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \frac{0,97 \times 0,01}{0,0382} \approx 0,2539$.

b. $p(M/\overline{T}) = \frac{p(M \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0,03 \times 0,05}{0,9618} \approx 0,0015$.