

## Sujet bac 2015 – Série C

### Exercice 1

4 points

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation  $(E) : 21x - 17y = 4$ .

- Montrer que cette équation admet au moins une solution.
  - Montrer que l'équation  $(E)$  est équivalente à l'équation  $(E') : 21x \equiv 4 [17]$ .
- On se propose de résoudre l'équation  $(E')$ . On rappelle qu'un entier relatif  $a$  est l'inverse modulo  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) d'un entier relatif  $b$  si  $ab \equiv 1 [n]$ .
  - Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.
  - Montrer que les solutions de l'équation  $(E')$  sont les entiers relatifs  $x$  tels que  $x = 1 + 17k$  ;  $k \in \mathbb{Z}$ .
- En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

### Exercice 2

8 points

Dans le plan orienté, on considère le carré  $ABCD$  de centre  $O$  tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Soit  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[DC]$  et  $[AD]$ . On prendra  $AB = 4$  cm.

- Faire une figure.
- On considère l'ellipse  $(E)$  de centre  $\Omega$ , d'excentricité  $\frac{1}{2}$  dont un foyer est  $B$  et une directrice  $(AD)$ . Quel est l'axe focal de  $(E)$  ?
- Soit  $S_1$  et  $S_2$  les points de  $(E)$  situés sur la droite  $(AB)$ .
  - Montrer que  $\overrightarrow{BS_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$ .
  - Placer  $S_1$  et  $S_2$ .
- Tracer le cercle principal  $(C_p)$  de  $(E)$ .
- Tracer le cercle secondaire  $(C_s)$  de  $(E)$ .
- Tracer le cercle directeur  $(C_d)$  de  $(E)$  ayant pour centre le foyer  $B$ .
- Construire le point de  $(E)$  situé sur la demi-droite  $[BC)$ .
- Tracer l'arc de  $(E)$  balayé par l'angle  $(\overrightarrow{\Omega S_3}, \overrightarrow{\Omega B})$  où  $S_3$  est un sommet de  $(E)$  situé sur l'axe non focal et du même côté que  $C$ .
- Soit  $f$  la transformation plane définie par :  $f = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$ .
  - Qu'appelle-t-on symétrie glissée ?
  - Montrer que  $f$  est une symétrie glissée. Déterminer son vecteur et son axe.
  - Tracer  $(E')$  l'image de  $(E)$  par  $f$ .

### Exercice 3

5 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1 - x \ln x}{x}$$

On admet que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ . Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de  $\alpha$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

On définit la suite numérique  $(u_n)$  telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1. Sachant que  $f(\alpha) = 0$ , montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation  $g(x) = x$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ ,  $u_n \in I$ .
3. On suppose que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ . En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :  $\forall x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ .
4. a. Montrer que :  $\forall n \geq 0, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ .  
b. En déduire que  $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .  
c. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .
5. a. Déterminer un entier  $n_0$  tel que  $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-1}$ .  
b. Déterminer la valeur approchée  $u_{n_0}$  de  $\alpha$ .

#### Exercice 4

3 points

Une maladie atteint 3 % d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95 % des tests sont positifs et 5 % sont négatifs.
- Chez les individus non malades, 1 % des tests sont positifs et 99 % négatifs.

On note :

- $M$  l'évènement : « être malade » et,
- $T$  l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité de l'évènement «  $M \cap T$  », puis celle de «  $\overline{M} \cap \overline{T}$  ».
3. Déterminer  $P(T)$  et  $P(\overline{T})$ .
4. a. Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.  
b. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.