

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2015
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. Les racines carrées de $u = 6 + 6i\sqrt{3}$ sont les $z = x + iy$ tels que $z^2 = u$, soit $x^2 - y^2 = 6$, $xy = 3\sqrt{3}$, et $x^2 + y^2 = |u| = 12$. On obtient :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x = \pm 3, y = \pm \sqrt{3} \text{ (même signe)}$$

D'où les racines $\alpha_1 = 3 + i\sqrt{3}$ et $\alpha_2 = -3 - i\sqrt{3}$.

2. a. En remplaçant $Z = -\frac{1}{2}$ dans $4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4$:

$$\frac{-4 - 12i\sqrt{3} + 36 + 12i\sqrt{3} - 32}{8} = 0.$$

b. On cherche a, b, c tels que $4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)(aZ^2 + bZ + c)$. Par identification : $a = 4$, $c = -8$, $b = -2 - 6i\sqrt{3}$. D'où le facteur $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8$.

Résolution de $4Z^2 - 2(1 + 3i\sqrt{3})Z - 8 = 0$: le discriminant réduit est $\Delta' = (1 + 3i\sqrt{3})^2 + 32 = 6 + 6i\sqrt{3} = u = (3 + i\sqrt{3})^2$. D'où

$$Z_2 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z_3 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Les solutions de (E) sont $Z_1 = -\frac{1}{2}$, $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $Z_3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Méthode. Équation de degré 3 : vérifier la racine fournie par l'énoncé, factoriser par identification des coefficients, puis résoudre le trinôme restant. Remarque que le discriminant $\Delta' = u$ retombe sur la question 1 : dans un exercice de bac, les questions préliminaires resservent presque toujours plus loin.

3. a. Soit $Z' = aZ + b$ l'expression de S .

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \Rightarrow a = \frac{Z_C - Z_B}{Z_B - Z_A} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - i\sqrt{3}, \quad b = Z_B - aZ_A = 0.$$

D'où $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z$.

b. $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$: S est la similitude directe de centre O (affixe 0), de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

1. $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base de $\mathcal{E}$.

2. Matrice de f dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a. De $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = \vec{0} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} \\ 2f(\vec{i}) + 3f(\vec{j}) = \vec{0} \end{cases}$, on tire $f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$.

b. $f(\vec{u}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x(3\vec{i} + 3\vec{j}) + y(-2\vec{i} - 2\vec{j}) = (3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j}$. D'où $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$.

c. $f \circ f(\vec{u}) = (3x - 2y)f(\vec{i}) + (3x - 2y)f(\vec{j}) = (3x - 2y)\vec{i} + (3x - 2y)\vec{j} = f(\vec{u})$.

d. f est un endomorphisme vérifiant $f \circ f = f$: c'est une projection vectorielle, de base l'ensemble des vecteurs invariants et de direction son noyau.

e. Base : $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow 3x - 2y = x$ et $3x - 2y = y$, soit $x - y = 0$: droite engendrée par $(1, 1)$.

Direction : $f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$: droite engendrée par $(2, 3)$.

Rappel de cours. Un endomorphisme f vérifiant $f \circ f = f$ est une *projection vectorielle*. Sa base est l'ensemble des vecteurs invariants ($f(\vec{u}) = \vec{u}$) et sa direction est son noyau ($f(\vec{u}) = \vec{0}$) : tout vecteur se projette sur la base, parallèlement à la direction.

Exercice 3

1. $\frac{1}{x \ln x}$ existe $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 1$. Donc $E_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. $\forall x \in E_f, f'(x) = -\frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}$.

3. a. f' est du signe de $-1 - \ln x$, qui s'annule en $x = \frac{1}{e}$:

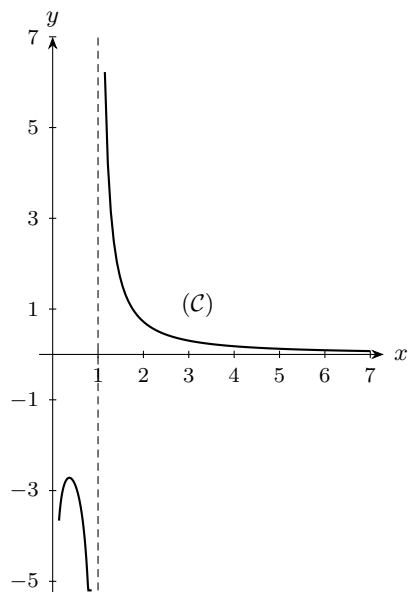
x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$		
$(x \ln x)^2$		+	+	0	+	
$-1 - \ln x$		+	0	-	-	
$f'(x)$		+	0	-		-

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$.

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$						
$f'(x)$		+	0	-		-				
f		$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

c. Branches infinies : asymptote verticale $x = 0$ ($\lim_{0^+} f = -\infty$) ; asymptote verticale $x = 1$ ($\lim_{1^\pm} f = \mp\infty$) ; asymptote horizontale $y = 0$ ($\lim_{+\infty} f = 0$).

d.



4. a. $\frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$.

b. $\frac{1/x}{\ln x}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$, donc

$$I = \int_e^3 \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3) - \ln(\ln e) = \ln \ln 3.$$

Rappel de cours. Forme $\frac{u'}{u}$: une primitive est $\ln |u|$. C'est pourquoi l'énoncé fait d'abord écrire $\frac{1/x}{\ln x}$ sous la forme $\frac{1/x}{\ln x}$ — apprendre à provoquer soi-même cette écriture quand un $\ln$ apparaît au dénominateur.

c. $\mathcal{A} = \ln(\ln 3) \text{ u.a} = 4 \ln(\ln 3) \text{ cm}^2$.

Exercice 4

On note $(x_i, n_{i\bullet})$ et $(y_j, n_{\bullet j})$ les distributions marginales, $N = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$.

1. Lois marginales :

X	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	5	2

Y	-1	1
$n_{\bullet j}$	6	4

2. $\bar{X} = \frac{3(-1) + 5(0) + 2(2)}{10} = 0,1$; $\bar{Y} = \frac{6(-1) + 4(1)}{10} = -0,2$.

3. Inertie du nuage :

$$I_G = \sum_i n_{i\bullet} (x_i - \bar{X})^2 + \sum_j n_{\bullet j} (y_j - \bar{Y})^2 = 3(1,1)^2 + 5(0,1)^2 + 2(1,9)^2 + 6(0,8)^2 + 4(1,2)^2 = 20,5.$$

4. $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ avec

$$V(X) = \frac{3(-1)^2 + 5(0)^2 + 2(2)^2}{10} - 0,1^2 = 1,09 ; \quad V(Y) = \frac{6(-1)^2 + 4(1)^2}{10} - (-0,2)^2 = 0,96,$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{2 \cdot 1 + 0 + 0 - 2 + 2}{10} - 0,1 \times (-0,2) = 0,12.$$

$$\text{D'où } \rho_{X,Y} = \frac{0,12}{\sqrt{1,09} \sqrt{0,96}} = 0,117.$$