

## Sujet bac 2015 – Série D

### Exercice 1

5 points

On considère l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes et on rappelle que  $i^2 = -1$ .

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $u = 6 + 6i\sqrt{3}$ .
- Soit l'équation  $(E)$  définie dans  $\mathbb{C}$  telle que :

$$(E) : 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$$

- Vérifier que  $Z_0 = -\frac{1}{2}$  est solution de l'équation  $(E)$ .
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .
- Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On donne les trois points  $A, B, C$  d'affixes respectives  $Z_A = -\frac{1}{2}$ ,  $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  et  $Z_C = 1 + i\sqrt{3}$ .
    - Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe  $S$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ .
    - Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude  $S$ .

### Exercice 2

5 points

Soit  $\mathcal{E}$  le plan vectoriel rapporté à sa base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On donne les vecteurs  $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ . On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$  et  $f(\vec{e}_2) = \vec{0}$ .

- Vérifier que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathcal{E}$ .
- Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
- Soit  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  l'image de  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  par l'endomorphisme  $f$  telle que  $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ .
  - Montrer que  $f(\vec{i}) = 3\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ .
  - Exprimer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $\vec{u}'$  en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  de  $\vec{u}$ .
  - Calculer  $f \circ f(\vec{u})$ .
  - En déduire la nature de  $f$ .
  - Déterminer les caractéristiques de  $f$ .

### Exercice 3

6 points

On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$ , définie telle que

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$(C)$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- Montrer que  $f$  est définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .
- Vérifier que la dérivée  $f'$  de  $f$  est  $f'(x) = \frac{-1 - \ln x}{(x \ln x)^2}$ .
- Étudier le signe de  $f'$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - Étudier les branches infinies à  $(C)$ .

- d. Tracer  $(C)$ .
4. a. Montrer que  $f$  peut encore s'écrire  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ .
- b. Calculer l'intégrale  $I = \int_e^3 f(x) dx$ .
- c. En déduire l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine du plan limité par la courbe  $(C)$  de  $f$ , l'axe  $(Ox)$  des abscisses et les droites d'équations  $x = e$  et  $x = 3$ . Unité graphique : 2 cm.

**Exercice 4**

*4 points*

On considère la série statistique  $(x_i, y_j, n_{ij})$  représentée par le tableau à double entrée suivant :

$X \setminus Y$	-1	1
-1	2	1
0	3	2
2	1	1

- Déterminer les deux séries marginales.
- Déterminer les coordonnées  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  du point moyen du nuage statistique.
- Calculer l'inertie du nuage par rapport au point moyen  $G$ .
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .