

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2016
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. L'algorithme d'Euclide donne : $3024 = 2688 \times 1 + 336$, $2688 = 336 \times 8 + 0$. Le PGCD, dernier reste non nul, est donc égal à 336.

Comme $\text{PGCD}(2688; 3024) = 336$, il existe des couples (u, v) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $2688u + 3024v = 336$. En multipliant par -10 : $2688(-10u) + 3024(-10v) = -3360$. On en déduit que les couples $(-10u, -10v)$ sont solutions de (E) . Donc (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. $2688x + 3024y = -3360 \iff \frac{2688}{336}x + \frac{3024}{336}y = -\frac{3360}{336} \iff 8x + 9y = -10$. On en déduit que (E) et (E_1) sont équivalentes.

Méthode. Devant $ax + by = c$ avec de grands coefficients : calculer $d = \text{pgcd}(a, b)$. Si d ne divise pas c , aucune solution entière ; s'il divise c , diviser toute l'équation par d pour se ramener à des coefficients premiers entre eux — les calculs de Bézout et de Gauss deviennent bien plus légers.

3. a.

$$\begin{aligned} 8x + 9y = -10 &\iff 8x + 10 = 9(-y), \quad y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 8x + 10 \text{ est un multiple de } 9 \iff 8x + 10 \equiv 0 [9] \iff 8x \equiv -10 [9] \end{aligned}$$

D'où (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

b. 1 est une solution particulière de (E_2) : $8x \equiv -10 [9]$, car $8 \times 1 = -10 + 9 \times 2 \equiv -10 [9]$. Soit x une solution de (E_2) :

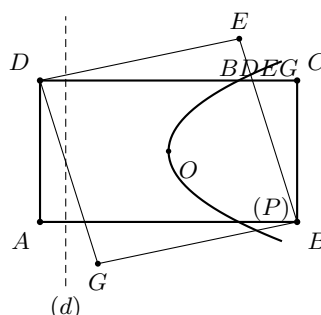
$$\begin{cases} 8x \equiv -10 [9] \\ 8 \times 1 \equiv -10 [9] \end{cases} \iff 8x \equiv 8 \times 1 [9] \iff 8(x - 1) \equiv 0 [9] \iff 9 \mid 8(x - 1).$$

Comme 9 est premier avec 8, d'après Gauss, 9 divise $x - 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 9k$. D'où $x = 1 + 9k$. Les solutions de (E_2) sont $\{1 + 9k; k \in \mathbb{Z}\}$.

c. En remplaçant x par $1 + 9k$ dans $8x + 9y = -10$, on obtient $y = -2 - 8k$. Les solutions de (E_1) sont $S = \{(1 + 9k; -2 - 8k); k \in \mathbb{Z}\}$. Les équations (E) et (E_1) étant équivalentes, S est aussi l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 2

1.



2. $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$ est la rotation de centre B et d'angle $2 \times ((BD), (BA)) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

Rappel de cours. Composée de deux réflexions : si les axes sont sécants en Ω , $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$ est la rotation de centre Ω et d'angle double de l'angle (Δ_1, Δ_2) ; si les axes sont parallèles, c'est une translation de vecteur double du vecteur joignant Δ_1 à Δ_2 . L'ordre de composition compte.

3. Comme g est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe, alors g est une symétrie glissée.

4. a. Les transformations f et $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$ ne sont pas égales. Soit Q le centre du rectangle $ABCD$. $f(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}(Q) = S_{(AD)} \circ S_{(AB)}(Q) = S_{(AD)}(F) = H$. Mais $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(Q) = t_{\overrightarrow{BF}}(Q) = A$. D'où $f \neq t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Montrons plutôt que $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

Première solution :

$$\begin{aligned} S_{(AD)} \circ R &= S_{(AD)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(BG)} = t_{\overrightarrow{BE}} \circ S_{(BG)} \\ &= t_{\overrightarrow{BF}} \circ t_{\overrightarrow{FE}} \circ S_{(BG)} = t_{\overrightarrow{BF}} \circ \underbrace{S_{(AC)} \circ S_{(BG)}}_{t_{\overrightarrow{FE}} \circ S_{(BG)}} = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \end{aligned}$$

Deuxième solution : $S_{(AD)} \circ R$ est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe : c'est une symétrie glissée. Posons $u = S_{(AD)} \circ R$. On a $u(B) = S_{(AD)}(B) = E$ et $u(E) = S_{(AD)}(G) = G$, d'où $u \circ u(B) = G$. On en déduit que le vecteur de u est $\frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF}$. Comme $u(B) = E$, l'axe de u est la droite dirigée par $\overrightarrow{BF}$ passant par le milieu de $[BE]$, c'est-à-dire (AC) . D'où $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

b. L'axe (AC) étant dirigé par $\overrightarrow{BF}$, $S_{(AD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{3})}$ est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{BF}$ et d'axe (AC) .

5. La tangente et la normale à la parabole (P) en F coupent l'axe focal en deux points E et B . Donc le foyer de (P) est le milieu de $[EB]$. D'où A est le foyer de (P) .

6. H est le symétrique du foyer A de (P) par rapport à la tangente (EF) à (P) . On en déduit que H est un point de la directrice (d) . D'où (d) est la perpendiculaire à l'axe focal (EB) passant par H , c'est-à-dire la droite (HL) .

7. Les tangentes aux deux extrémités d'une corde focale d'une parabole sont sécantes en un point de la directrice et sont perpendiculaires.

Construction de I : Soit N le point d'intersection de la tangente (FE) et de la directrice (d) . Le point I de (P) est le point d'intersection de la demi-droite $[FA)$ et de la perpendiculaire à (EF) en N .

8. Soit O le point d'intersection de l'axe focal (EB) et de la directrice (d) . J et K sont symétriques par rapport à (EB) et les tangentes en J et K à (P) sont sécantes en O et perpendiculaires. Constructions de J et K : les points J et K sont les points d'intersection de la droite (AD) et du cercle de centre A et de rayon AO .

9. Voir figure.

10. a.

$$f = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AD)} \circ g = \underbrace{S_{(AD)} \circ R \circ R}_{t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}} = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R$$

D'où $f(A) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(A) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(F) = t_{\overrightarrow{BF}}(E)$. Comme A est le foyer de (P) , le foyer de (P') est le point E' tel que $BFFE'E$ soit un parallélogramme.

b. $f(A) = E' \in (ED)$. $f(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)} \circ R(B) = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}(B) = t_{\overrightarrow{BF}}(L) = E$. Comme (AB) est l'axe focal de (P) , alors (ED) est l'axe focal de la parabole (P') .

Exercice 3

1. L'équation caractéristique associée à $y'' + 2y' + 2y = 0$ est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Elle admet deux racines $r_1 = -1 - i$ et $r_2 = -1 + i$. La solution générale est $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

La solution particulière f vérifie $f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$:

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} \\ f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \sin x$.

2. a. F est une primitive de f si $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. On en déduit que $(-A + B) \cos x + (-A - B) \sin x = \sin x$. Par identification, $-A + B = 0$ et $-A - B = 1$. D'où $A = B = -\frac{1}{2}$. F est définie par $F(x) = -\frac{e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2}$.

Méthode. Primitive de $e^{ax} \cos(bx)$ ou $e^{ax} \sin(bx)$: chercher F sous la même forme, $F(x) = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$, dériver, puis identifier les coefficients de $\cos$ et de $\sin$. C'est plus rapide que deux intégrations par parties successives.

b. $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) dx = \left[-\frac{e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} (-e^{-\pi})^n.$

3. a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^{n+1}}{\frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n} = -e^{-\pi}$. (v_n) est une suite géométrique de raison $-e^{-\pi}$ et de premier terme $v_0 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$.

b. $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} (1 + (-e^{-\pi}) + \dots + (-e^{-\pi})^n) = \frac{1}{2} (1 - (-e^{-\pi})^{n+1})$. Comme $|-e^{-\pi}| = e^{-\pi} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-e^{-\pi})^{n+1} = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1. Tableau linéaire associé :

X	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Y	-1	-1	2	3	-1	-1	2	2	2	3

2. On note $(x_i, n_{i\bullet})$ et $(y_j, n_{\bullet j})$ les distributions marginales, avec $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = N$.

X	1	2
$n_{i\bullet}$	4	6

Y	-1	2	3
$n_{\bullet j}$	4	4	2

$$V(X) = \frac{1}{10} [4 \times 1^2 + 6 \times 2^2] - 1,6^2 = 0,24. \quad V(Y) = \frac{1}{10} [4(-1)^2 + 4 \times 2^2 + 2 \times 3^2] - 1^2 = 2,8.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{10} (2(-1) + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2(-2) + 3 \times 4 + 1 \times 6) - 1,6 \times 1 = 0,1.$$

D'où le coefficient de corrélation : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0,1}{\sqrt{0,24} \times \sqrt{2,8}} = 0,1219$.

3. D'après 1. et sachant que $\bar{X} = 1,6$ et $\bar{Y} = 1$, les vecteurs centrés ont pour coordonnées :

$$X - \bar{X} = (-0,6; -0,6; -0,6; -0,6; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4),$$

$$Y - \bar{Y} = (-2; -2; 1; 2; -2; -2; 1; 1; 1; 2).$$

Le cosinus de l'angle formé par les vecteurs centrés est donné par $\cos((X - \bar{X}), (Y - \bar{Y})) = \rho_{X,Y}$.
D'où cet angle vaut $\cos^{-1}(0,1219) \approx 83^\circ$.