Sujet bac 2016 – Série C

Exercice 1 *4 points*

On donne dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E) : 2688x + 3024y = -3360$$

1. Déterminer le PGCD$(2688, 3024)$, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E_1) : 8x + 9y = -10$.
3. a Montrer que l'équation (E_1) peut s'écrire $(E_2) : 8x \equiv -10\ [9]$.

   b Résoudre l'équation (E_2).

   c En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2 *8 points*

Le plan est orienté. $ABCD$ est un rectangle tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On considère le losange $BDEG$ tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})\ [2\pi]$.

Dans cet exercice, S_Δ et $t_{\vec{u}}$ désignent respectivement la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) et la translation de vecteur $\vec{u}$. On considère la transformation

$$f = S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$$

1. Faire la figure. On prendra $AB = 4$ cm et on disposera (AB) horizontalement.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g = S_{(AB)} \circ S_{(BD)}$.
3. R désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer la nature exacte de la transformation $S_{(AD)} \circ R$.
4. On désigne par F le milieu du segment $[BG]$.

   a. Démontrer que $f = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

   Erreur dans l'énoncé : il s'agit plutôt de montrer $S_{(AD)} \circ R = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$. En effet, la transformation f n'est pas égale à $t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{(AC)}$.

   b. En déduire les éléments caractéristiques de f.

   Substituer cette question par : Déduire les éléments caractéristiques de $S_{(AD)} \circ R$.

5. Soit (P) la parabole dont une tangente est la droite (EF), la normale associée est la droite (GB) et l'axe focal est la droite (EB). Démontrer que A est le foyer de la parabole (P).
6. Soit H le milieu du segment $[EG]$ et L celui du segment $[ED]$. Déterminer la directrice (d) de la parabole (P).
7. Construire le point I de (P) tel que $[IF]$ soit une corde focale.
8. Construire la corde focale $[JK]$ de (P) où J appartient au segment $[AD]$.
9. Construire l'arc d'extrémités J et F de (P).
10. Soit (P') l'image de (P) par la transformation f.

    a. Déterminer le foyer de la parabole (P').

    b. Déterminer l'axe focal de (P').

Exercice 3 *5 points*

1. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$$

vérifiant les conditions initiales suivantes : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2. On pose $f(x) = e^{-x} \sin x$.

   a. Déterminer les réels A et B pour que $F(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\, dx$.

3. Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}(-e^{-\pi})^n \ ; \quad n \in \mathbb{N}$$

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Calculer la somme des termes $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 4 *3 points*

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

$X \setminus Y$	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1. Convertir ce tableau en un tableau linéaire.

2. Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$ des caractères X et Y. On donne $\overline{X} = 1{,}6$ et $\overline{Y} = 1$.

3. Donner une interprétation géométrique de cette corrélation.