

BACCALAURÉAT — SÉRIE D  
**Mathématiques — Session 2016**  
*Corrigé détaillé*

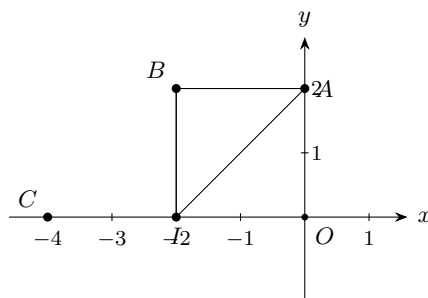
---

### Exercice 1

1.  $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ , d'où  $z' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} z$ .  $S$  est de la forme  $z' - z_0 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - z_0)$  avec  $z_0 = 0$  : similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

2.  $z_B = (1 + i) \times 2i = -2 + 2i$  ;  $z_C = (1 + i)(-2 + 2i) = -4$ .

3.



4.  $z_I = \frac{z_O + z_C}{2} = -2$ .  $|z_A - z_B| = 2$  et  $|z_I - z_B| = 2$ , donc  $BA = BI$ . De plus  $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_I - z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ , donc  $(BI) \perp (BA)$ . Le triangle  $ABI$  est rectangle isocèle en  $B$ .

5.  $z_A, z_B, z_C$  annulent  $(z - z_A)(z - z_B)(z - z_C) = (z - 2i)(z + 4)(z + 2 - 2i)$  :

$$= z^3 + (6 - 4i)z^2 + (4 - 20i)z - 16 - 16i.$$

**Méthode.** Construire un polynôme admettant des racines données  $z_A, z_B, z_C$  : former le produit  $(z - z_A)(z - z_B)(z - z_C)$  puis développer — de préférence deux facteurs à la fois, en simplifiant à chaque étape.

### Exercice 2

1. De  $f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  on tire  $\vec{i} = \frac{1}{3}f(\vec{j}) + \frac{2}{3}\vec{j}$ , d'où (car  $f$  est linéaire)  $f(\vec{i}) = \frac{1}{3}f^2(\vec{j}) + \frac{2}{3}f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}(3\vec{i} - 2\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j}$ . Puis  $f \circ f(\vec{i}) = 2f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = 2(2\vec{i} - \vec{j}) - (3\vec{i} - 2\vec{j}) = \vec{i}$ .

2.  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base et  $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ ,  $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$  :  $f$  est une symétrie vectorielle.

**Rappel de cours.** Caractérisations utiles :  $f \circ f = f$  définit une projection,  $f \circ f = \text{id}$  définit une symétrie vectorielle (involution, donc bijective et  $f^{-1} = f$ ). Pour une symétrie : base = vecteurs invariants ( $f(\vec{u}) = \vec{u}$ ), direction = vecteurs changés en leur opposé ( $f(\vec{u}) = -\vec{u}$ ).

3. a. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

b. Comme  $f \circ f = \text{id}$ ,  $f^{-1} = f$  :  $f$  est un automorphisme involutif.

c. Expression analytique :  $f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x(2\vec{i} - \vec{j}) + y(3\vec{i} - 2\vec{j}) = (2x + 3y)\vec{i} + (-x - 2y)\vec{j}$ , d'où

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}.$$

Base :  $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow x+3y=0$  : droite engendrée par  $(-3, 1)$ . Direction :  $f(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow x+y=0$  : droite engendrée par  $(-1, 1)$ .

4. a.  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , donc  $\mathcal{B}' = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

b. De  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$  on a  $f(\vec{u}) = \vec{i} = -\vec{u} - \vec{v}$  et  $f(\vec{v}) = -3\vec{i} + \vec{j} = \vec{v}$ . La matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 3

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

2. Asymptote verticale  $x=0$  et asymptote horizontale  $y=1$ .

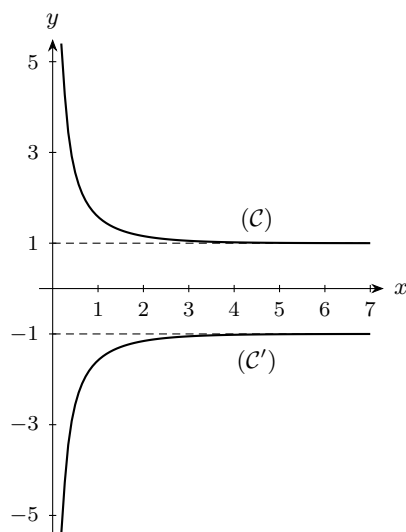
3. a.  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ .

b.  $f'(x) < 0$  :  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

c.

|         |             |              |
|---------|-------------|--------------|
| $x$     | 0           | $+\infty$    |
| $f'(x)$ | $\parallel$ | $-$          |
| $f$     | $+\infty$   | $\searrow$ 1 |

4. & 5.



6.  $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = 2 [\ln(e^x - 1)]_1^2 = 2 \ln(e + 1)$  u.a =  $2 \ln(e + 1)$  cm<sup>2</sup>.

### Exercice 4

On note  $(x_i, n_{i\bullet})$  et  $(y_j, n_{\bullet j})$  les distributions marginales,  $N = \sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ .

1. Lois marginales :

|                |       |   |       |
|----------------|-------|---|-------|
| $X$            | -1    | 1 | 2     |
| $n_{i\bullet}$ | $m+2$ | 3 | $n+5$ |

|                 |   |       |       |
|-----------------|---|-------|-------|
| $Y$             | 0 | 1     | 2     |
| $n_{\bullet j}$ | 4 | $m+3$ | $n+3$ |

**2.**  $\bar{X} = \frac{-m + 2n + 11}{m + n + 10}$  et  $\bar{Y} = \frac{m + 2n + 9}{m + n + 10}$ . Les conditions  $\bar{X} = 1$  et  $\bar{Y} = 1$  donnent  $n = 1$  et  $m = 1$ .

**Méthode.** Effectifs inconnus dans un tableau statistique : exprimer les moyennes (ou autres indicateurs imposés) en fonction des paramètres — sans oublier que l'effectif total  $N$  en dépend aussi — puis résoudre le système donné par les contraintes de l'énoncé.

**3. a.**  $Y = aX + b$  avec  $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{-1/12}{1/2} = -\frac{1}{6}$  et  $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$ . D'où  $Y = -\frac{1}{6}X + \frac{7}{6}$ .

**b.**  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-1/12}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/6}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ .