Sujet bac 2016 – Série D

Exercice 1 *5 points*

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S définie par :

$$z' = (1+i)z$$

1. Déterminer la nature, le rapport et l'angle de l'application S.
2. Soit le point A d'affixe $z_A = 2i$. Déterminer les affixes des points B et C définis par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
3. Placer les points A, B, et C dans un repère du plan.
4. Soit le point I milieu du segment $[OC]$. Montrer que le triangle ABI est rectangle et isocèle en B.
5. Écrire une équation de troisième degré dont les affixes z_A, z_B et z_C définies ci-dessus sont solutions.

Exercice 2 *5 points*

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par :

$$f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad f \circ f(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$$

1. Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f \circ f(\vec{\imath})$.
2. En déduire la nature de l'application f.
3. a. Qu'est-ce qu'un automorphisme ?
   b. Prouver que f est un automorphisme involutif.
   c. Caractériser l'application f.
4. Soit les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   a. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 *7 points*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm, on considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. On note (C), la courbe de f dans le plan.

1. Calculer les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.
2. Déduire que la fonction f admet deux asymptotes que l'on précisera.
3. a. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$.
   b. Donner le sens de variation de f.
   c. Dresser son tableau de variation.
4. Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = -f(x)$. Construire la courbe (C') de g dans le même repère que (C).

6. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan délimitée par les courbes (C) et (C'), et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 4 *3 points*

Soit le tableau statistique à double entrée :

$X \setminus Y$	0	1	2
-1	1	m	1
1	1	0	2
2	2	3	n

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y en fonction de n et m.
2. Déterminer m et n sachant que le point moyen du nuage statistique est $G(1\,;1)$.
3. On pose $m = 1$ et $n = 1$.

   a. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Y en X sachant que la covariance de X et Y est égale à $-\dfrac{1}{12}$, la variance de X est $\dfrac{1}{2}$ et celle de Y est $\dfrac{1}{6}$.

   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.