

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2017
Corrigé détaillé

Exercice 1

a. Comme $\text{PGCD}(48; 35) = 1$, d'après le théorème de Bézout, l'équation $(E) : 48x + 35y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. $48 \times (-8) = -384 = 1 + 35 \times (-11) \equiv 1 [35]$. D'où 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c.

$$\begin{aligned} 48x + 35y = 1 &\iff 48x - 1 = 35(-y), \quad y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 48x - 1 \text{ est un multiple de } 35 \iff 48x - 1 \equiv 0 [35] \iff 48x \equiv 1 [35] \end{aligned}$$

Les équations $(E) : 48x + 35y = 1$ et $48x \equiv 1 [35]$ sont équivalentes.

Solution particulière : d'après b., $48 \times (-8) + 35 \times 11 = 1$. D'où $(-8; 11)$ est une solution particulière de (E) .

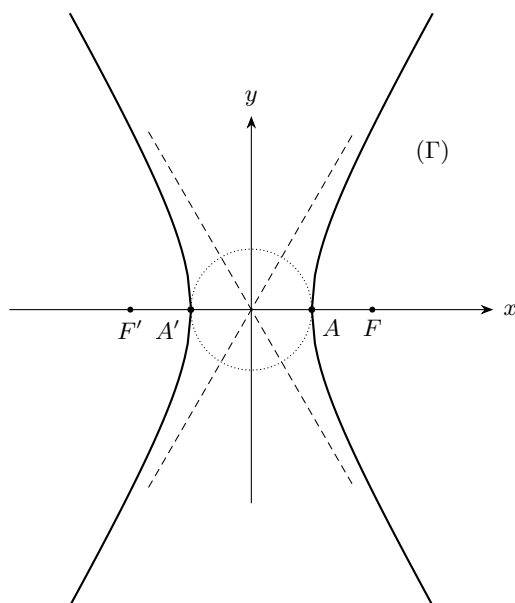
d. -8 est une solution particulière de $48x \equiv 1 [35]$. Soit x une solution :

$$\begin{cases} 48x \equiv 1 [35] \\ 48 \times (-8) \equiv 1 [35] \end{cases} \iff 48x \equiv 48 \times (-8) [35] \iff 48(x + 8) \equiv 0 [35] \iff 35 \mid 48(x + 8).$$

Comme 35 est premier avec 48, d'après Gauss, 35 divise $x + 8$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 8 = 35k$. D'où $x = -8 + 35k$. Les solutions de $48x \equiv 1 [35]$ sont $\{-8 + 35k; k \in \mathbb{Z}\}$.

En remplaçant x par $-8 + 35k$ dans (E) , on obtient $y = 11 - 48k$. L'ensemble des solutions de (E) est $\{(-8 + 35k; 11 - 48k); k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2



4. $EA = EC$ car E est le centre de gravité du triangle ABC . $EA = EF$ car F est le symétrique de A par rapport à E . On en déduit que $[EC]$ est la médiane relative à $[AF]$ et a pour longueur

la moitié de $[AF]$. Donc le triangle ACF est rectangle en C et par conséquent les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

5. Axe focal : A étant le centre de l'hyperbole, l'axe focal est la perpendiculaire à la directrice (BC) passant par A , c'est-à-dire la droite (AG) .

F foyer de (Γ) : C est un point d'intersection du cercle principal et de la directrice (BC) . On en déduit que la droite (AC) est une asymptote de l'hyperbole (Γ) . Or C est aussi le projeté orthogonal du point F de l'axe focal (AG) sur l'asymptote (AC) . Donc F est un foyer de l'hyperbole (Γ) .

6. a. Voir la figure.

b. $\frac{AF}{AB} = \frac{c}{a}$ représente l'excentricité de l'hyperbole (Γ) . Dans le triangle ABF rectangle en B : $\cos(\widehat{FAB}) = \cos(30^\circ) = \frac{AB}{AF}$. D'où $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Rappel de cours. Excentricité $e = \frac{c}{a}$ d'une conique à centre : $e > 1$ pour une hyperbole, $0 < e < 1$ pour une ellipse. Définition par foyer et directrice : M appartient à la conique si et seulement si $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur la directrice — c'est cette caractérisation qui sert à la question 8.

7. Soit K le point d'intersection de la perpendiculaire à (AH) passant par H et de la parallèle à (AC) passant par G . $\cos(\widehat{HGK}) = \cos(30^\circ) = \frac{GH}{GK}$, d'où $GK = \frac{2\sqrt{3}}{3}GH$. Le point I est donc le point d'intersection du cercle de centre G de rayon GK et de la demi-droite $[GH)$.

8. Comme $J \in (\Gamma)$, alors $\frac{JF}{JP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ où P est le projeté orthogonal de J sur la directrice (BC) . Or $JP = GH$ et d'après 7., $\frac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$. On en déduit que $JF = \frac{2\sqrt{3}}{3}JP = \frac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$. J est donc le point d'intersection de la droite (d) et du cercle de centre F de rayon GI .

9. Voir figure.

10. a. Notons $h = h_{(A, \frac{1}{2})}$ et $h_{(\Omega, k)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k .

Centre de la similitude $h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)} : G$ est le projeté orthogonal de A sur (BC) . Soit Ω le centre de la similitude s et (Δ) son axe. Alors $s = h_{(\Omega, \frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ h_{(\Omega, \frac{1}{2})}$, d'où $s \circ s = h_{(\Omega, \frac{1}{4})}$. On a :

$$s(A) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(A) = G, \quad s \circ s(A) = h_{(A, \frac{1}{2})}(G) = G' \text{ (milieu de } [AG]).$$

On en déduit que $h_{(\Omega, \frac{1}{4})}(A) = G'$, soit $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$. Par Chasles, $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$, d'où $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Donc $\Omega = E$.

Axe de la similitude : l'axe (Δ) est la perpendiculaire à (AG) passant par E .

b. Foyer de (H') : $s(F) = h_{(E, \frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)}(F) = h_{(E, \frac{1}{2})}(A) = F'$ (milieu de $[AE]$). Comme F est le foyer de (H) , alors F' est le foyer de (H') .

Directrice de (H') : $s(B) = h_{(A, \frac{1}{2})}(B) = M$ (milieu de $[AB]$) ; $s(C) = h_{(A, \frac{1}{2})}(C) = N$ (milieu de $[AC]$). Comme (BC) est la directrice de (H) associée au foyer F , alors (MN) est la directrice de (H') associée à F' .

Asymptote de (H') : $s(A) = G$ et $s(C) = N$. Comme (AC) est l'asymptote de l'arc (H) , alors (GN) est l'asymptote de l'arc (H') .

Sommet de (H') : le cercle (C) de centre A de rayon $[AC]$ étant le cercle principal de (H) , le cercle (C') de centre G et de rayon GN est le cercle principal de (H') . On en déduit que S' , point d'intersection de (C') et de l'axe focal, est le sommet de (H') associé à F' .

c. Toute similitude conserve le rapport des distances. On en déduit que l'excentricité de (Γ') est égale à celle de (Γ) et vaut $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3

1. a. La fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue et $1 \in I$. Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \int_1^x f(t) dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Rappel de cours. Théorème fondamental : si f est continue sur I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a . On étudie donc les variations de F en lisant directement le signe de f , sans chercher d'expression explicite.

b.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x+1)$	0	+	+
$x-1$		-	0
$F'(x) = f(x)$	0	-	0

• $\forall x \in]0; 1[, f(x) < 0$ et F est strictement décroissante. • $\forall x \in]1; +\infty[, f(x) > 0$ et F est strictement croissante.

2.

L'inégalité $F(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$ pour $x \geq 2$ est fausse. En effet, en intégrant par parties, $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}\right) \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} - 2 \ln 2$, et un tableau de valeurs montre que $F(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 < 0$ pour les valeurs de x comprises entre 2 et 2,8 environ. On peut cependant établir que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$, ce qui permet de répondre aux questions suivantes.

a. Montrons que $\forall x \geq 2, F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$. Soit $x \geq 2$. Comme $f(t) \geq t-1$ pour tout $t \geq 2$, par passage à l'intégrale : $\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x (t-1) dt$. En ajoutant $\int_1^2 f(t) dt$ aux deux membres :

$$\int_1^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \geq \int_1^2 f(t) dt + \int_2^x (t-1) dt.$$

Il en résulte que $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$ pour tout $x \geq 2$.

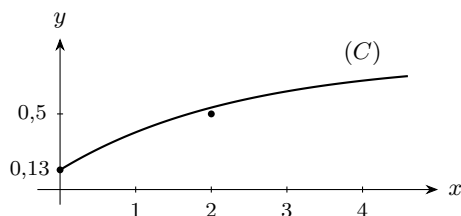
b. Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$: comme $F(x) \geq F(2) + \frac{x^2}{2} - x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right) = +\infty$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$: de même, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{x} \left(F(2) + \frac{x^2}{2} - x\right)$ dont la limite est $+\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$. La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

c. Tableau de variation de F :

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	0	−	0 +
F	$F(0)$	$\searrow$	0 $\nearrow$ $+\infty$

d.



3. a. $F(n+1) - F(n) = \int_1^{n+1} f(t) dt - \int_1^n f(t) dt = \int_n^{n+1} f(t) dt$. D'où $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b.

Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on n'a pas $f(0) \leq u_0 \leq f(1)$ puisque $f(0) = 0$; $f(1) = 0$ et $u_0 = \int_0^1 f(t) dt = -F(0) \neq 0$.

Montrons d'abord que f est croissante sur $[n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [n, n+1]$, $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1} > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[n, n+1]$.

Montrons que $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. F est continue et dérivable sur $[n, n+1]$, et $F'(n) \leq F'(x) \leq F'(n+1)$ pour tout $x \in [n, n+1]$ car $F' = f$ est croissante. D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, en prenant $x = n$ et $y = n+1$:

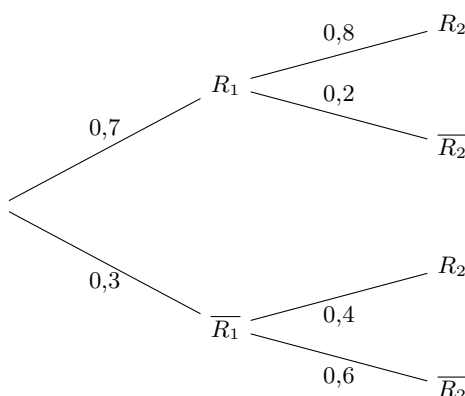
$$f(n)((n+1) - n) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n+1)((n+1) - n).$$

D'où $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.

Méthode. Encadrer $\int_n^{n+1} f(t) dt$ quand f est monotone sur $[n, n+1]$: l'intégrale est comprise entre $f(n) \times 1$ et $f(n+1) \times 1$ (aires des rectangles inscrit et circonscrit). C'est la méthode des rectangles, à la base de la comparaison entre suites et intégrales.

Exercice 4

1.



2. $p(R_1 \cap R_2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$

3. $p(R_2) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,4 = 0,68.$

4. $p(A) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,26.$