Sujet bac 2017 – Série C

Exercice 1

4 points

On considère l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $48x + 35y = 1$.

a Justifier à l'aide du théorème de Bézout que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b Justifier que les entiers 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c En remarquant que (E) peut s'écrire $48x \equiv 1\ [35]$, déterminer une solution particulière (x_0, y_0).

d Achever la résolution de l'équation (E).

Exercice 2

8 points

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de centre de gravité E.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4$ cm.
2. Construire le cercle (C) de centre A passant par B.
3. Construire le point F symétrique de A par rapport à E.
4. Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal (C) et dont une directrice est la droite (BC).

5. Montrer que F est un foyer de (Γ). Préciser son axe focal.
6. On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC), et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AG}$.
   a. Construire H.
   b. On pose $AF = c$ et $AB = a$. Que représente le rapport $\dfrac{AF}{AB}$ pour (Γ) ? Montrer que ce rapport est égal à $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
7. Construire le point I du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \dfrac{c}{a}\overrightarrow{GH}$.
8. Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H. Construire le point J de (Γ) situé sur (d) et situé dans le demi-plan délimité par la droite (AH) contenant le point C.
9. On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F. Construire l'arc (H) de (Γ) d'extrémités J et S.
10. On désigne par s la similitude plane indirecte définie par : $s = h \circ S_{(BC)}$ où h est l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et $S_{(BC)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BC).
    a. Déterminer l'axe (Δ) et le centre (Ω) de s.
    b. Construire l'arc (H'), image de (H) par s.
    c. Déterminer l'excentricité de (Γ') image de (Γ) par s.

Exercice 3

5 points

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = [0\,; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
On pose pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

1. a. Prouver que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$; $F'(x) = f(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F sur I.

2. On admet que pour tout $x \geq 2$, on a $f(x) \geq x - 1$.

a. Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

Erreur dans l'énoncé : L'inégalité $F(x) \geq \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ pour tout $x \geq 2$ est fausse. Substituer cette question par : Prouver que pour tout $x \geq 2$, $F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variation de F.

d. Donner l'allure de la courbe (C) représentant la fonction F dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm. On donne $F(0) = 0{,}13$; $F(2) = 0{,}5$.

3. Soit la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

a. Vérifier que $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[n\,;n+1]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.

Erreur dans l'énoncé : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 *3 points*

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de 0,7 ;
- s'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de 0,8 ;
- s'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de 0,4.

On note R_1 l'événement « le premier tir au but est réussi » et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».

1. Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.
3. Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.
4. On note A, l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer $P(A)$.