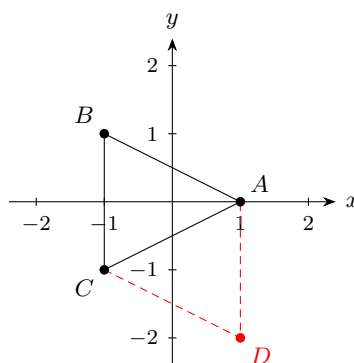


BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2017
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. $P(1) = 1 + 1 - 2 = 0$: 1 est racine de P .
- b. $(Z - 1)(Z^2 + 2Z + 2) = Z^3 + 2Z^2 + 2Z - Z^2 - 2Z - 2 = Z^3 + Z^2 - 2$.
- c. $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 1$ ou $Z^2 + 2Z + 2 = 0$. Ce dernier a pour discriminant réduit $\Delta' = i^2$, d'où $Z = -1 - i$ ou $Z = -1 + i$. L'ensemble des solutions est $\{1, -1 - i, -1 + i\}$.

2. a.



- b. $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $z_B - z_A = z_C - z_D$. D'où $z_D = 1 - 2i$.
3. a. La rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $Z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - z_A)$, d'où $Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- b. Par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Méthode. Rotation de centre A et d'angle θ : partir systématiquement de $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$. Pour l'expression analytique, poser $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, développer, puis identifier parties réelle et imaginaire.

Exercice 2

1. Matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} \frac{a}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.
2. Expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{a}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$
3. f est une symétrie vectorielle ssi $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$. On calcule $f \circ f(\vec{j}) = \left(\frac{4a}{25} - \frac{12}{25}, 1\right)$; $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j} \Leftrightarrow \frac{4a}{25} - \frac{12}{25} = 0 \Leftrightarrow a = 3$. Pour $a = 3$, on vérifie aussi $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$. Donc f est une symétrie vectorielle ssi $a = 3$.

Méthode. Déterminer un paramètre pour qu'un endomorphisme soit une symétrie (resp. une projection) : traduire $f \circ f = \text{id}$ (resp. $f \circ f = f$) sur les vecteurs de la base — il suffit de le vérifier sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ — et résoudre l'équation obtenue en a .

4. a. Pour $a = 3$: Base $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow x - 2y = 0$; Direction $f(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow 2x + y = 0$.

b. $\vec{e}_1 = (2, 1)$. c. $\vec{e}_2 = (-1, 2)$.

d. $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

e. Comme $\vec{e}_1$ engendre la base de f et $\vec{e}_2$ la direction, $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$. Matrice de f dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$.

2. a. $\forall x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{1+x}{x^2}$. b. $g'(x) > 0$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,26$ et $g(2) \approx 0,19$; g est continue strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2}; 2\right[$ avec $g\left(\frac{3}{2}\right)g(2) < 0$. D'après le TVI, il existe un unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

b. $g(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x + \ln x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

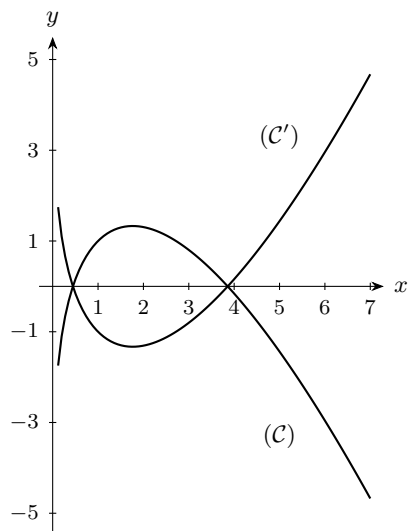
2. a. $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \ln x - (x - 1) \cdot \frac{1}{x} = -g(x)$.

b. f' est de signe contraire à g et s'annule en α :

x	0		$\alpha \approx 1,7$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 1,3$	$\searrow$	$-\infty$

3. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \ln x + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$: asymptote verticale $x = 0$.

b. $(\mathcal{C}) : y = f(x)$ et $(\mathcal{C}') : y = -f(x)$ (symétrique par rapport à (Ox)).



Exercice 4

1. $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. À partir des probabilités cumulées : $P_1 = \frac{1}{6}$; $P_2 = \frac{5}{24} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$; $P_3 = \frac{7}{24} - \frac{5}{24} = \frac{1}{12}$;
 $P_4 = \frac{1}{3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24}$; $P_5 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

x_i	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{3}$

Méthode. Retrouver une loi à partir des probabilités *cumulées* : $p(X = x_i) = p(X \leq x_i) - p(X \leq x_{i-1})$
— chaque probabilité est la différence de deux cumulées consécutives. Contrôle : la somme des P_i doit valoir 1 (ici $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{2}{3} = 1$).

3. $E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P_i = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{24} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{24} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$