

## Sujet bac 2017 – Série D

### Exercice 1

5 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  avec  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$  cm. On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$ .

- Montrer que 1 est une racine de  $P(Z)$ .
  - Vérifier que  $P(Z)$  peut s'écrire sous la forme :  $P(Z) = (Z - 1)(Z^2 + 2Z + 2)$ .
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$ .
- On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$Z_A = 1 ; \quad Z_B = -1 + i ; \quad Z_C = -1 - i$$

- Construire le triangle  $ABC$ .
  - Déterminer l'affixe  $Z_D$  du point  $D$  telle que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
- Soit  $R$  la rotation de centre  $A$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$ .
    - Montrer que l'expression complexe de  $R$  est telle que :

$$Z' = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) Z + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Soit  $M$  et  $M'$  les points d'affixes respectives  $Z = x + iy$  et  $Z' = x' + iy'$ . Exprimer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  du point  $M'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

### Exercice 2

5 points

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base du plan vectoriel  $\mathcal{E}$ ,  $f$  désigne l'endomorphisme de  $\mathcal{E}$  tel que :

$$\begin{cases} 5f(\vec{i}) = a\vec{i} + 4\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} \end{cases} \quad (1)$$

- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- Déterminer l'expression analytique de  $f$ .
- Déterminer le réel  $a$  pour que  $f$  soit une symétrie vectorielle.
- On pose  $a = 3$ .
  - Déterminer les éléments caractéristiques de  $f$  (base et direction).
  - Déterminer un vecteur directeur  $(\vec{e}_1)$  de la base.
  - Déterminer un vecteur directeur  $(\vec{e}_2)$  de la direction.
  - Soit  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$  deux vecteurs. Démontrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
  - Donner la matrice de  $f$  relativement à la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### Exercice 3

7 points

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -\frac{1}{x} + \ln(x)$ .

1. Calculer les limites de  $g$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
2. a. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
3. a. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ .  
b. En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

## Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - (x - 1) \ln(x).$$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
2. a. Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est  $f'(x) = -g(x)$ .  
b. Dresser le tableau de variation de  $f$ . On prendra  $\alpha = 1,7$  et  $f(\alpha) = 1,3$ .
3. On admet que l'équation  $f(x) = 0$ , admet deux solutions  $x_0$  et  $x_1$  avec  $x_0 \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$  et  $x_1 \in \left] \frac{7}{2}; 4 \right[$ .  
a. Étudier la branche infinie à  $(C)$ .  
*Remplacer la question par : « Étudier les branches infinies à  $(C)$ . »*  
b. Tracer la courbe  $(C)$ .
4. Tracer la courbe  $(C')$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = -f(x)$  dans le même repère que  $(C)$ .

## Exercice 4

3 points

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par le tableau :

$X$	$] - \infty; x_1[$	$[x_1; x_2[$	$[x_2; x_3[$	$\dots$	$[x_n; +\infty[$
$F(X)$	0	$P_1$	$P_1 + P_2$	$\dots$	$P_1 + P_2 + \dots + P_n$

où  $P_i$  est la probabilité associée à la valeur  $x_i$ .

Soit la fonction de répartition  $F$  d'une variable aléatoire  $X$ , définie par le tableau ci-après :

$X$	$] - \infty; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$	$[6; +\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

1. Donner les valeurs exactes prises par  $X$ .
2. Établir la loi de probabilité de  $X$ .
3. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$ .