

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2018
Corrigé détaillé

Exercice 1

1.

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{36} \\ x \equiv 3 \pmod{25} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 36a, \ a \in \mathbb{Z} \\ x = 3 + 25b, \ b \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff 2 + 36a = 3 + 25b \iff (E) : 36a - 25b = 1.$$

On en déduit que le système (S) et l'équation (E) sont équivalents.

Méthode. Système de congruences simultanées $x \equiv r_1 \pmod{n_1}$ et $x \equiv r_2 \pmod{n_2}$: écrire $x = r_1 + n_1a = r_2 + n_2b$, ce qui ramène à une équation diophantienne en (a, b) . Une fois a décrit, les solutions forment une classe modulo n_1n_2 (ici $900 = 36 \times 25$, car 36 et 25 sont premiers entre eux).

2. $36 \times (-9) - 25 \times (-13) = -324 + 325 = 1$. Donc $(-9; -13)$ est solution de $(E) : 36a - 25b = 1$.

3.

$$\begin{aligned} 36a - 25b = 1 &\iff 36a - 1 = 25b, \ b \in \mathbb{Z} \\ &\iff 36a - 1 \text{ est un multiple de } 25 \iff 36a - 1 \equiv 0 \pmod{25} \iff 36a \equiv 1 \pmod{25} \end{aligned}$$

On en déduit que (E) et (E') sont équivalentes.

4. Comme $36 \times (-9) = 1 + 25 \times (-13)$, alors $36 \times (-9) \equiv 1 \pmod{25}$. Donc -9 est l'inverse de 36 modulo 25.

5.

$$\begin{cases} 36a \equiv 1 \pmod{25} \\ 36 \times (-9) \equiv 1 \pmod{25} \end{cases} \iff 36a \equiv 36 \times (-9) \pmod{25} \iff 36(a + 9) \equiv 0 \pmod{25} \iff 25 \mid 36(a + 9).$$

Comme 25 est premier avec 36, d'après Gauss, 25 divise $a + 9$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a + 9 = 25k$. D'où $a = -9 + 25k$. Les solutions de (E') sont $\{-9 + 25k; k \in \mathbb{Z}\}$.

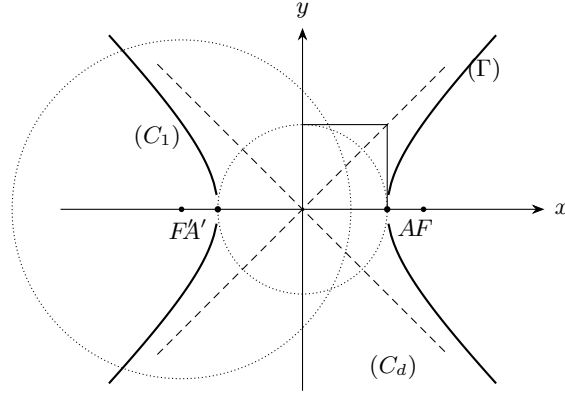
6. a. En remplaçant a par $-9 + 25k$ dans $36a - 25b = 1$, on obtient $b = -13 + 36k$. L'ensemble des solutions de (E) est $\{(-9 + 25k; -13 + 36k); k \in \mathbb{Z}\}$.

b. Soit x une solution de (S) , de la forme $x = 2 + 36a$ où a vérifie (E') . D'après la question précédente, $a = -9 + 25k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. D'où $x = 2 + 36(-9 + 25k) = -322 + 900k$.

$$0 < x < 50 \iff 0 < -322 + 900k < 50 \iff \frac{322}{900} < k < \frac{372}{900}.$$

Il n'existe pas d'entier k compris entre $\frac{322}{900}$ et $\frac{372}{900}$. Donc le système (S) n'admet pas de solution x telle que $0 < x < 50$.

Exercice 2



1. Voir figure.

2. a. (OF) est l'axe focal. De plus, OC est la demi-distance focale. Donc J est le point d'intersection du cercle (C_1) et de la demi-droite $[OF)$.

b. J étant un foyer de (Γ) , le projeté orthogonal de J sur l'une des diagonales $[AC]$ ou $[BD]$ est un point de la directrice associée à J . D'où (D) est la droite perpendiculaire à l'axe focal (OF) passant par ce projeté orthogonal.

c. Notons J_1 le second foyer de (Γ) ; (C_d) le cercle directeur associé à J (centre J , rayon $2 \times OF = 4$) ; P le point d'intersection de $[BJ]$ et de (C_d) . K est alors le point d'intersection de la médiatrice de $[J_1P]$ et de $[BJ]$. En effet,

$$KJ_1 - KJ = KJ_1 - (KP - JP) = KJ_1 - KP + 4.$$

Comme K est sur la médiatrice de $[J_1P]$, alors $KJ_1 = KP$. D'où $KJ_1 - KJ = 4$, ce qui prouve que K est un point de l'hyperbole (Γ) .

d. $[OC)$ est la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.

e. Construire K' symétrique de K par rapport à l'axe focal (OF) . À partir des points F et K' et sachant que $[OC)$ est une asymptote à (Γ_0) , on donne une allure de (Γ_0) .

3. Notons Ω le centre de la similitude S , $h_{(\Omega,2)}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport 2, $S_{(AC)}$ la symétrie axiale d'axe (AC) . S s'écrit $S = h_{(\Omega,2)} \circ S_{(AC)}$ avec $\Omega \in (AC)$.

Centre Ω : $S(F) = I$. $S(F) = h_{(\Omega,2)} \circ S_{(AC)}(F) = h_{(\Omega,2)}(G)$. On en déduit que $h_{(\Omega,2)}(G) = I$, soit $2\vec{\Omega G} = \vec{\Omega I}$. Par Chasles, $2\vec{\Omega O} + 2\vec{OG} = \vec{\Omega O} + \vec{OI}$, d'où $\vec{\Omega O} = \vec{OI} - 2\vec{OG} = \vec{0}$ car I est le symétrique de O par rapport à G . D'où $\Omega = O$.

4. a. Le rectangle fondamental de (Γ) étant un carré, (Γ) est une hyperbole équilatère. Comme toute similitude conserve la nature des figures, le rectangle fondamental de (Γ') est un carré. Donc (Γ') est une hyperbole équilatère.

b. Toute similitude conserve le rapport des distances. On en déduit que (Γ) et (Γ') ont même excentricité. Donc l'excentricité de (Γ') est $\frac{OC}{OF} = \sqrt{2}$.

c. $S(O) = O$ et $S(F) = I$. Comme le cercle de centre O et de rayon OF est le cercle principal de (Γ) , alors le cercle de centre O et de rayon OI est le cercle principal de (Γ') .

d. $S(A) = h_{(O,2)}(A) \in (AC)$ et $S(C) = h_{(O,2)}(C) \in (AC)$. La droite (AC) est stable par S : c'est une asymptote de (Γ') . De même, $S(B) = h_{(O,2)}(B) \in (BD)$ et $S(D) = h_{(O,2)}(D) \in (BD)$: la droite (BD) est stable, c'est la seconde asymptote de (Γ') .

e. $S(O) = O$ et $S(F) = I$. Comme (OF) est l'axe focal de (Γ) , alors (OI) est l'axe focal de (Γ') .

Exercice 3

Partie A

- $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = (x+1)e^x$.
- $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) > 0$. D'où le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
g	-1	$\nearrow +\infty$

3. a. $g\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,17$ et $g(1) \approx 1,71$. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$. De plus $g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Rappel de cours. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires : si g est continue et *strictement monotone* sur $[a; b]$ et si $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution *unique* dans $]a; b[$. La stricte monotonie est ce qui garantit l'unicité.

b. g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$. On en déduit que : $\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$; $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x}\right) = +\infty$.
- $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x}$.
- a. f' est du signe de g sur $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$ $\nearrow$ $+\infty$

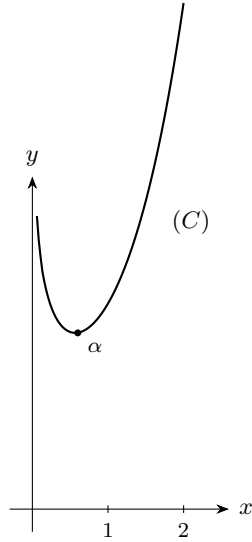
b. f est continue sur $]0; +\infty[$, strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ puis croissante sur $]\alpha; +\infty[$. Donc f admet un minimum en α . α vérifie $f'(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha - 1}{\alpha} = 0$, donc $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha = \frac{1}{e^\alpha}$. En remplaçant dans $f(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha$:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \ln \frac{1}{e^\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \alpha.$$

Donc le minimum est $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Méthode. Schéma de la fonction auxiliaire : quand le signe de f' n'est pas lisible directement, l'énoncé fait étudier une fonction g telle que f' soit du signe de g ; la racine α de g (localisée par le TVI) donne l'abscisse de l'extremum. La relation $g(\alpha) = 0$ (ici $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$) sert ensuite à *simplifier* l'expression de $f(\alpha)$ — ne pas chercher de valeur exacte de α , elle n'existe pas.

7.



Exercice 4

On note $(x_i, n_{i\bullet})$ et $(y_j, n_{\bullet j})$ les distributions marginales de X et Y , avec $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j} = N$.

1.

X	2	3
$n_{i\bullet}$	5	8

Y	-1	2	3
$n_{\bullet j}$	3	3	7

2.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^2 n_{i\bullet} x_i = \frac{5 \times 2 + 8 \times 3}{13} = \frac{34}{13}, \quad \bar{Y} = \frac{3(-1) + 3 \times 2 + 7 \times 3}{13} = \frac{24}{13}.$$

Les coordonnées du point moyen G sont $\left(\frac{34}{13}, \frac{24}{13}\right)$.

3. a.

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{13} (2(-2) + 3 \times 6 + 1(-3) + 3 \times 6 + 4 \times 9) - \frac{34}{13} \times \frac{24}{13} = \frac{29}{169}.$$

b. L'équation de régression linéaire de Y en X est $Y = aX + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

$$V(X) = \frac{1}{13} (5 \times 2^2 + 8 \times 3^2) - \left(\frac{34}{13}\right)^2 = \frac{40}{169}.$$

$$a = \frac{\frac{29}{169}}{\frac{40}{169}} = \frac{29}{40} \quad \text{et} \quad b = \frac{24}{13} - \frac{29}{40} \times \frac{34}{13} = -\frac{1}{20}.$$

D'où l'équation de la droite de régression linéaire : $Y = \frac{29}{40}X - \frac{1}{20}$.