Sujet bac 2018 – Série C

Exercice 1 *4 points*

On considère le système d'équations (S) défini par :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 2 \ [36] \\ x \equiv 3 \ [25] \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S) est équivalent à l'équation $(E) : 36a - 25b = 1$ où a et b désignent des entiers relatifs.
2. Vérifier que le couple $(-9, -13)$ est une solution de (E).
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 36a \equiv 1 \ [25]$.
4. Donner l'inverse modulo 25 de 36.
5. En déduire les solutions de (E').
6. a. Déterminer les solutions de l'équation (E).
   b. En déduire les solutions du système (S) telles que $0 < x < 50$.

Exercice 2 *8 points*

Dans le plan orienté (P), on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.

E, F, G et H désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. (C_1) est le cercle circonscrit au triangle ABD. I est le symétrique de O par rapport à G.

1. Faire une figure que l'on complétera. On prendra $AB = 4$ cm et on placera (AB) horizontalement.
2. Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré $ABCD$ et d'axe non focal la droite (EG).
   a. Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite $[OF)$.
   b. Préciser la directrice (D) de (Γ) associée au foyer J.
   c. Construire le point K de (Γ) situé sur le segment $[JB]$.
   d. Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.
   e. Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.
3. Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (AC) de rapport 2, qui transforme le point F en le point I. Démontrer que son centre est O.
4. Soit (Γ') l'image de (Γ) par S.
   a. Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère.
   b. Trouver l'excentricité de (Γ').
   c. Construire le cercle principal (C_2) de (Γ').
   d. Démontrer que (Γ) et (Γ') ont les mêmes asymptotes.
   e. Déterminer l'axe focal de (Γ').
   f. Construire l'image J' du foyer J de (Γ).
   g. Construire l'image (C_1') du cercle (C_1) par S.

h. Construire l'image (Γ'_0) de (Γ_0) par S.

Exercice 3 *5 points*

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1. Calculer la dérivée g' de g.
2. Dresser le tableau de variation de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

   b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

4. Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
5. Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.
6. a. Dresser le tableau de variation de f. On admet que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy).

   b. Montrer que f admet un minimum $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.
7. Tracer la courbe (C). On prendra $\alpha = 0{,}6$ et $f(\alpha) = 2{,}3$.

Exercice 4 *3 points*

Soit la série statistique à deux caractères (X, Y) donnée par le tableau à double entrée ci-dessous.

$X \setminus Y$	-1	2	3
2	2	0	3
3	1	3	4

1. Déterminer les séries marginales de X et Y.
2. Déterminer les coordonnées $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.
3. On admet que la variance de X est $\dfrac{10}{169}$ et celle de Y est 2,59.

   a. Montrer que la covariance de X et Y est égale à $\dfrac{29}{169}$.

   b. Montrer que la droite de régression linéaire de Y en X est : $Y = \dfrac{29}{40}X - \dfrac{1}{20}$.