

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2018
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = 2 - 3i$.

b. Translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: $Z' = Z + 2 - 3i$, d'où $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$.

c. $Z_{A'} = Z_A + 2 - 3i = 3 - i$.

2. a. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_A}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b. Rotation R de centre A , d'angle $-\frac{\pi}{2}$: $Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A$, d'où $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 3 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} x_{C'} = y_C - 1 = -2 \\ y_{C'} = -x_C + 3 = 2 \end{cases}$, donc $Z_{C'} = -2 + 2i$.

3. Soit $Z' = aZ + b$ l'expression de S . $\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = A \end{cases} \Rightarrow$ en soustrayant, $a(Z_A - Z_B) = 0$, donc $a = 0$. Il n'existe donc pas de similitude directe S telle que $S(A) = A$ et $S(B) = A$.

Rappel de cours. Une similitude directe $z' = az + b$ exige $a \neq 0$: c'est une bijection du plan, donc deux points *distincts* ont toujours des images distinctes. Demander $S(A) = S(B) = A$ avec $A \neq B$ est contradictoire — d'où la non-existence établie ici.

Exercice 2

1. $(\mathcal{D}_1) : (x, y) \in (\mathcal{D}_1) \Leftrightarrow x = 2y$, d'où $(x, y) = y(2, 1) : (\mathcal{D}_1)$ est engendrée par $\vec{e}_1 = (2, 1) = 2\vec{i} + \vec{j}$. $(\mathcal{D}_2) : x = -y$, d'où $(x, y) = y(-1, 1) : (\mathcal{D}_2)$ est engendrée par $\vec{e}_2 = (-1, 1) = -\vec{i} + \vec{j}$.

2. $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de $\mathcal{E}$.

3. (i) $\vec{e}_1 \in (\mathcal{D}_1)$, $\vec{e}_2 \in (\mathcal{D}_2)$, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base, donc $(\mathcal{D}_1) + (\mathcal{D}_2) = \mathcal{E}$. (ii) Si $x \in (\mathcal{D}_1) \cap (\mathcal{D}_2)$: $x_1 = 2x_2$ et $x_1 = -x_2$, d'où $x_1 = x_2 = 0$, soit $(\mathcal{D}_1) \cap (\mathcal{D}_2) = \{0\}$. Les sous-espaces $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$.

Méthode. Deux sous-espaces sont supplémentaires si leur somme est l'espace entier *et* leur intersection est réduite au vecteur nul. En dimension 2, pour deux droites vectorielles, il suffit de vérifier que leurs vecteurs directeurs forment une base (déterminant non nul).

4. $\begin{cases} f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \\ f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j} \\ -f(\vec{i}) + f(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j} \end{cases}$, d'où $f(\vec{i}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$.

Exercice 3

1. Pour $x > 0$, $\frac{\ln x}{-1 + \ln x}$ existe ssi $\ln x \neq 1$, soit $x \neq e$; pour $x \leq 0$, e^{-2x} existe. Donc $E_f =]-\infty; e[\cup]e; +\infty[$.

Piège classique. Ensemble de définition : ne pas s'arrêter à la condition d'existence du $\ln$ ($x > 0$) — il faut aussi exclure les valeurs qui annulent le *dénominateur* ($\ln x = 1$, soit $x = e$). Passer en revue chaque opération interdite : division par zéro, $\ln$ d'un nombre négatif ou nul, racine d'un nombre négatif.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{-1 + \ln x}\right) = 1$. Donc f est continue en 0.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(-1 + \ln x)} = -\infty$. Les limites diffèrent : f n'est pas dérivable en 0.

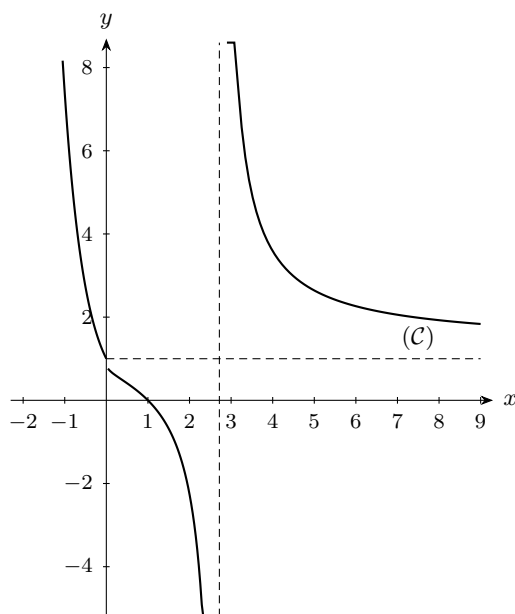
4. a. f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]0; e[\cup]e; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-1}{x(-1 + \ln x)^2}$ sur $]0; e[\cup]e; +\infty[$; $f'(x) = -2e^{-2x}$ sur $] -\infty; 0[$.

b. $f'(x) < 0$ partout. Avec $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{e^-} f = -\infty$, $\lim_{e^+} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = 1$:

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		—	—	—
f	$+\infty$	$\searrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$ $+\infty$	$\searrow$ 1

5. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$. Asymptote horizontale $y = 1$ en $+\infty$; asymptote verticale $x = e$.

b.



$$6. \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^0 = \frac{e^2 - 1}{2} \text{ u.a} = 2(e^2 - 1) \text{ cm}^2.$$

Exercice 4

$$1. \bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5 ; \quad \bar{y} = \frac{0,2 + 1,4 + 1,8 + 2 + 2,6 + 3}{6} = 1,833.$$

$$2. y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{V(x)}, b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{6}(1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 1,4 + 3 \cdot 1,8 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2,6 + 6 \cdot 3) - 3,5 \times 1,833 = 1,4845$$

$$V(x) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - 3,5^2 = 2,9166$$

D'où $a = 0,50$ et $b = 1,833 - 0,50 \times 3,5 = 0,083$. La droite de régression est $y = 0,5x + 0,083$.

3. Pour $x = 7$: $y = 0,5 \times 7 + 0,083 = 3,583$. Au 7^e jour, le poids de la larve est estimé à 3,58 mg.