

BACCALAURÉAT — SÉRIE C  
**Mathématiques — Session 2019**  
*Corrigé détaillé*

---

**Exercice 1**

1. L'algorithme d'Euclide appliqué à 109 et 226 donne :

$$226 = 109 \times 2 + 8, \quad 109 = 8 \times 13 + 5,$$

$$8 = 5 \times 1 + 3, \quad 5 = 3 \times 1 + 2,$$

$$3 = 2 \times 1 + 1, \quad 2 = 1 \times 2 + 0.$$

Le PGCD, dernier reste non nul, est donc égal à 1.

2.  $\text{PGCD}(109; 226) = 1$ . D'après le théorème de Bézout, l'équation  $109x - 226y = 1$  admet des solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

3.  $109 \times 141 = 15369 = 1 + 226 \times 68 \equiv 1 [226]$ . D'où 141 est l'inverse de 109 modulo 226.

4. a.

$$109x - 226y = 1 \iff 109x - 1 = 226y, \quad y \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 109x - 1 \text{ est un multiple de } 226 \iff 109x - 1 \equiv 0 [226] \iff 109x \equiv 1 [226]$$

Les équations (E) et (E') sont équivalentes.

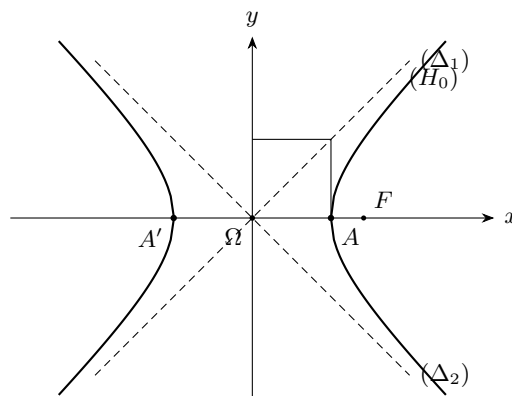
b. 141 est une solution particulière de  $109x \equiv 1 [226]$ . Soit  $x$  une solution :

$$\begin{cases} 109x \equiv 1 [226] \\ 109 \times 141 \equiv 1 [226] \end{cases} \iff 109x \equiv 109 \times 141 [226] \iff 109(x-141) \equiv 0 [226] \iff 226 \mid 109(x-141).$$

Comme 226 est premier avec 109, d'après Gauss, 226 divise  $x - 141$ . Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - 141 = 226k$ . D'où  $x = 141 + 226k$ . Les solutions de (E') sont  $\{141 + 226k; k \in \mathbb{Z}\}$ .

c. En remplaçant  $x$  par  $141 + 226k$  dans (E), on obtient  $y = 68 + 109k$ . L'ensemble des solutions de (E) est  $\{(141 + 226k, 68 + 109k); k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exercice 2**



**2. a.** Le centre de rotation de  $f$  est le point d'intersection des médiatrices des segments  $[OD]$  et  $[AC]$ . C'est le point  $B$ .

**b.** Comme  $f(B) = B$  et  $f(A) = C$ , alors  $\theta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

**Méthode.** Identifier une rotation donnée par deux points et leurs images ( $M \mapsto M', N \mapsto N'$ ) : le centre est l'intersection des médiatrices de  $[MM']$  et  $[NN']$  (il est équidistant de chaque point et de son image) ; l'angle se lit ensuite sur un couple  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ .

**c.**  $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$  est la rotation de centre  $B$  et d'angle  $2 \times ((BO), (BA)) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . D'où  $S_{(BA)} \circ S_{(BO)}$  est la réciproque de  $f$ .

**3. a.** Comme  $g$  est la composée d'une symétrie axiale et d'une rotation dont le centre n'appartient pas à l'axe, alors  $g$  est une symétrie glissée.

**b.**  $g(B) = S_{(OD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{2})}(B) = S_{(OD)}(B) = C$ .  $g(C) = S_{(OD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{2})}(C) = S_{(OD)}(A) = E$ .

**c.**  $g \circ g(B) = g(C) = E$ .  $g$  étant une symétrie glissée telle que  $g \circ g(B) = E$ , on en déduit que le vecteur  $\vec{u}$  de  $g$  vérifie  $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BO}$ .

**d.** Comme  $g(B) = C$ , l'axe de  $g$  est la droite dirigée par  $\overrightarrow{BO}$  passant par le milieu  $O'$  de  $[BC]$ , c'est-à-dire la droite  $(KO')$ .

**e.**

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\iff g(M) = f^{-1}(M) \\ &\iff S_{(OD)}(R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M)) = R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M) \quad \text{car } f^{-1} = R_{(B, \frac{\pi}{2})} \\ &\iff R_{(B, \frac{\pi}{2})}(M) \in (OD) \iff M \in R_{(B, -\frac{\pi}{2})}((OD)) \end{aligned}$$

$(\Gamma)$  est alors la droite  $R_{(B, -\frac{\pi}{2})}((OD))$ , perpendiculaire à  $(OD)$ . Comme  $R_{(B, -\frac{\pi}{2})}(O) = D$ , on en déduit que  $(\Gamma)$  est la droite perpendiculaire à  $(OD)$  passant par  $D$ .

**4. a.** Soit  $S$  un sommet de l'hyperbole  $(H)$  d'excentricité 2 :

$$\frac{SC}{SB} = 2 \iff SC^2 - 4SB^2 = 0 \iff (\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB}) \cdot (\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB}) = 0.$$

Comme  $B, C, S$  sont alignés, alors  $\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$  ou  $\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$ .

$\overrightarrow{SC} - 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$  :  $\overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{BC}$ . D'où  $S = G$  : premier sommet.

$\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} = \vec{0}$  :  $\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . D'où  $S = J$  : second sommet.

**b.** Le centre  $\Omega$  est le milieu du segment  $[GJ]$ .

**c.** Les asymptotes sont les droites  $(\Omega P)$  et  $(\Omega Q)$  où  $P$  et  $Q$  sont les points d'intersection du cercle principal et de la directrice  $(BA)$ .

**d.** Voir figure.

**e.** Soit  $(x, y)$  les coordonnées d'un point  $M$  de  $(H)$  dans le repère  $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$  et  $H(0, y)$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la directrice  $(BA)$ . Le foyer  $C$  a pour coordonnées  $C(1, 0)$ .

$$M \in (H) \iff \frac{MC}{MH} = 2 \iff MC^2 = 4MH^2 \iff (1-x)^2 + y^2 = 4x^2.$$

D'où l'équation cartésienne de  $(H)$  :  $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$ .

**Méthode.** Équation cartésienne d'une conique définie par foyer, directrice et excentricité : traduire  $\frac{MF}{MH} = e$  en  $MF^2 = e^2 MH^2$  (élever au carré évite les racines), puis exprimer les deux distances avec les coordonnées dans le repère imposé. Bien identifier au préalable les coordonnées du foyer et le projeté  $H$  sur la directrice.

### Exercice 3

1. L'équation caractéristique associée à  $y'' + 3y' + 2y = 0$  est  $r^2 + 3r + 2 = 0$ . Elle admet deux racines  $r_1 = -2$  et  $r_2 = -1$ . La solution générale est  $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ .

**Rappel de cours.** Équation  $y'' + ay' + by = 0$  : tout se lit sur l'équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$ . Deux racines réelles distinctes  $r_1, r_2$  :  $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$  ; racine double  $r$  :  $y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$  ; racines complexes  $\alpha \pm i\beta$  :  $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ . Les conditions initiales fixent ensuite  $c_1$  et  $c_2$ .

2.  $h$  est de la forme  $h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$  :

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$h$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$ .

3. a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-2x}(1 - 2e^x) = -\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x}(1 - e^x)$ .

c.  $f'(x)$  est du signe de  $1 - e^x$  et s'annule pour  $x = 0$ .

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ $0$ $-$ |           |

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty ; 0[$  et strictement décroissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

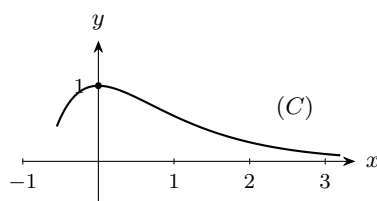
d. Tableau de variation :

|         |           |                           |           |
|---------|-----------|---------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$                       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $+$ $0$ $-$               |           |
| $f$     | $-\infty$ | $\nearrow$ $1$ $\searrow$ | $0$       |

e.  $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x}(-1 + 2e^x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^x = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 2$ . Le point d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses est le point  $(-\ln 2, 0)$ .

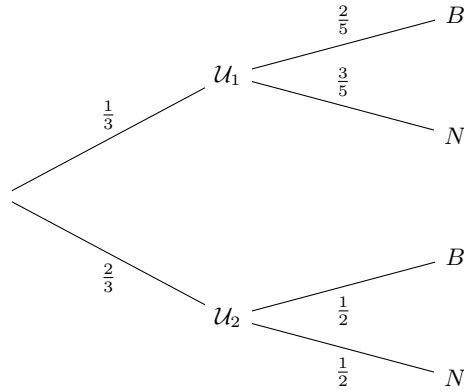
f.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-2x}}{x}(1 - 2e^x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{2u}}{u}(1 - 2e^{-u}) = +\infty$  (en posant  $u = -x$ ). La courbe  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$ .

g.



#### Exercice 4

1. a.  $p(\mathcal{U}_1) = p(\text{« obtenir 1 ou 2 sur la face supérieure du dé »}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .  
b.  $p(\mathcal{U}_2) = 1 - p(\mathcal{U}_1) = \frac{2}{3}$ .  
2.



3.  $p(\mathcal{N}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{15}$ .  
4.  $p(\mathcal{U}_1/\mathcal{N}) = \frac{p(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{N})}{p(\mathcal{N})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}$ .