

## Sujet bac 2019 – Série C

### Exercice 1

4 points

On considère l'équation  $(E) : 109x - 226y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- Déterminer le PGCD de 109 et 226.
- Que peut-on conclure pour l'équation  $(E)$  ?
- Vérifier que 141 est l'inverse de 109 modulo 226.
- Montrer que l'équation  $(E)$  est équivalente à l'équation  $(E') : 109x \equiv 1 \pmod{226}$ .
  - Résoudre l'équation  $(E')$ .
  - En déduire la solution de  $(E)$ .

Modifier la question : « En déduire les solutions de  $(E)$ . »

### Exercice 2

8 points

Dans le plan orienté, on considère un carré  $ABCE$  de sens direct, de centre  $O$ .

$D$  est le symétrique orthogonal du point  $O$  par rapport à la droite  $(BC)$ .  $K$  et  $O'$  sont les milieux respectifs des segments  $[BD]$  et  $[BC]$ . On désigne par  $G$  le symétrique du point  $C$  par rapport à  $B$ .

- Faire une figure. On disposera  $[BC]$  horizontalement, et on prendra  $BC = 6$  cm.
- Soit  $f$  la rotation qui transforme  $O$  en  $D$  et  $A$  en  $C$ .
  - Déterminer le centre de la rotation  $f$ .
  - Déterminer une mesure  $\theta$  de l'angle de  $f$ .
  - Prouver que  $f^{-1} = S_{(BO)} \circ S_{(BA)}$  où  $S_{(BO)}$  et  $S_{(BA)}$  désignent respectivement les symétries orthogonales d'axes  $(BO)$  et  $(BA)$ , est la réciproque de  $f$ .
- Soit  $g = S_{(OD)} \circ R_{(B, \frac{\pi}{2})}$ ,  $R_{(B, \frac{\pi}{2})}$  désigne la rotation de centre  $B$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .
  - Justifier que  $g$  est une symétrie glissée.
  - Déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$ .
  - En calculant  $(g \circ g)(B)$ , montrer que le vecteur de  $g$  est  $\vec{u} = \overrightarrow{BO}$ .
  - En déduire que l'axe de  $g$  est la droite  $(KO')$ .
  - Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan tels que :  $g(M) = f^{-1}(M)$ .
- Soit  $(H)$  l'hyperbole d'excentricité  $e = 2$ , de foyer  $C$  et de directrice associée  $(BA)$ .
  - Soit  $J$  le point du plan, tel que  $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . Montrer que  $G$  et  $J$  sont les sommets de  $(H)$ .
  - Placer le centre  $\Omega$  de  $(H)$ .
  - Tracer les asymptotes  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  de  $(H)$ .
  - Tracer  $(H_0)$ , la branche de l'hyperbole dont le sommet est  $J$ .
  - Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ . En utilisant la définition monofocale de  $(H)$  appliquée au foyer  $C$ , montrer qu'une équation cartésienne de  $(H)$  dans ce repère est :  $3x^2 + 2x - y^2 - 1 = 0$ .

### Exercice 3

5 points

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E) : y'' + 3y' + 2y = 0$ .
2. Déterminer la solution particulière  $h$  de  $(E)$  qui admet en  $x = 0$  un maximum égal à 1.  
*Modifier la question : « Déterminer la solution particulière  $h$  de  $(E)$  qui admet en  $x = 0$  un extremum égal à 1. »*
3. Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
  - b. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
  - c. Étudier le sens de variation de  $f$ .
  - d. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - e. Trouver le point d'intersection de la courbe  $(C)$  avec l'axe des abscisses.
  - f. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - g. Tracer  $(C)$ .

#### Exercice 4

3 points

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne  $U_2$  contient deux boules blanches et deux boules noires. Dans chacune des urnes, les boules sont indiscernables au toucher.

On lance sur une table un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne  $U_1$  ;
- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est strictement supérieur à 2, on tire une boule dans l'urne  $U_2$ .

On note  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  les événements suivants :

- $\mathcal{U}_1$  : « le tirage s'effectue dans l'urne  $U_1$  »
- $\mathcal{U}_2$  : « le tirage s'effectue dans l'urne  $U_2$  »
- $\mathcal{B}$  : « Obtenir une boule blanche »
- $\mathcal{N}$  : « Obtenir une boule noire »

1.
  - a. Montrer que la probabilité de l'événement  $\mathcal{U}_1$  est  $\frac{1}{3}$ .
  - b. En déduire la probabilité de l'événement  $\mathcal{U}_2$ .
2. Traduire par un arbre de probabilités, les données de l'énoncé.
3. Montrer que la probabilité de tirer une boule noire est égale à  $\frac{8}{15}$ .
4. On a tiré une boule noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $U_1$ .