

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2019
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. $Z^2 - 4Z + 8 = 0$ a pour discriminant réduit $\Delta' = (-2)^2 - 8 = -4 = (2i)^2$. Racines : $Z_1 = 2 - 2i$ et $Z_2 = 2 + 2i$.

b. $|Z_1| = 2\sqrt{2}$, d'où $Z_1 = 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.

2. a. $U = \frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2+2i}{2-2i} = \frac{1+i}{1-i} = i$.

b. $\left| \frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} \right| = |i| = 1$, donc $OA = OB$. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle isocèle en O .

3. a. $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}}Z$ avec $Z_O = 0$: f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b. $Z_A = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, d'où $Z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}Z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$. Forme algébrique : $Z_{A'} = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(2 - 2i) = (1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$.

c. Par identification : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Exercice 2

1. $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

2. Matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $f(\vec{V})$ pour $\vec{V}(3, -4)$: $x' = 2(3) + 3(-4) = -6$, $y' = -3 - 2(-4) = 5$, soit $\vec{V}'(-6, 5)$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$: f est bijectif (automorphisme).

5. a. $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.

b. $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base et $f \circ f = \text{id}$: f est une symétrie vectorielle.

c. Base : $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow x + 3y = 0$. Direction : $f(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow x + y = 0$.

Exercice 3

Partie I

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

2. Avec $\lim_{0^+} g = +\infty$, $\lim_{+\infty} g = 0$:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	$-$
g	$+\infty$	$\searrow$ 0

Partie II

1. a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b. Sur $]0; 1[$, $f(x) - g(x) = \frac{\ln x}{x} < 0$: $(\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{C}')$. Sur $]1; +\infty[$, $\frac{\ln x}{x} > 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de $(\mathcal{C}')$.

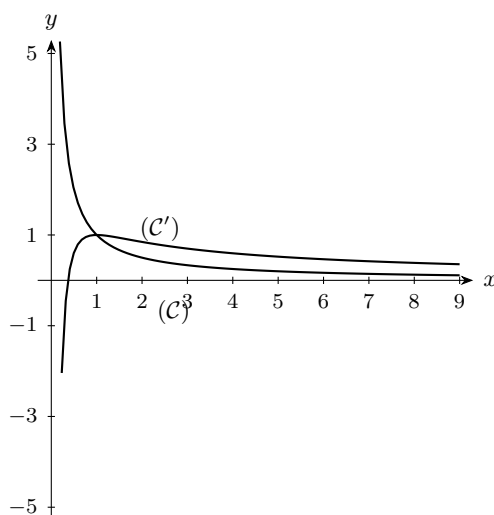
Méthode. Position relative de deux courbes : étudier le *signe* de la différence $f(x) - g(x)$. Là où elle est positive, $(\mathcal{C})$ est au-dessus ; là où elle s'annule, les courbes se coupent. Ce signe resservira pour orienter le calcul d'aire entre les courbes.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, du signe de $-\ln x$ (s'annule en $x = 1$).

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	-
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$

3. Asymptote verticale $x = 0$ ($\lim_{0^+} f = -\infty$) et asymptote horizontale $y = 0$ ($\lim_{+\infty} f = 0$).



Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x} = k(x)$: h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode. Quand l'énoncé propose une primitive candidate, ne pas l'intégrer : il suffit de *dériver* la fonction proposée et de vérifier qu'on retrouve l'intégrande. C'est toujours plus rapide et sans risque.

2. $\int_1^e (f(x) - g(x)) dx = \int_1^e h'(x) dx = [h(x)]_1^e = \frac{1}{2} \text{ u.a} = 2 \text{ cm}^2$.

Exercice 4

1. $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + a \cdot \frac{3}{8} + 3b = \frac{3}{8}(1 + a + 8b)$.

2. a. $E(X) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a + 8b = 3$. Comme $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + b = 1$, on a $b = \frac{1}{8}$, puis $a = 2$.

Méthode. Loi de probabilité à paramètres : ne pas oublier l'équation « cachée » $\sum p_i = 1$, toujours disponible en plus des contraintes de l'énoncé (ici la valeur de $E(X)$). Deux inconnues, deux équations : le système se résout.

b. $\text{Var}(X) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$; $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 0,86$.

3. Fonction de répartition :

X	$] - \infty; 0[$	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; +\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1