Sujet bac 2019 – Série D

Exercice 1 *5 points*

1. On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$(E) : Z^2 - 4Z + 8 = 0$$

   a. Résoudre l'équation (E).

   b. Écrire la solution dont la partie imaginaire est négative sous la forme trigonométrique.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.

   a. Écrire sous forme algébrique, le complexe $U = \dfrac{Z_B}{Z_A}$.

   b. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$.

   a. Préciser la nature de f.

   b. Écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, l'affixe $Z_{A'}$ du point A' tel que $A' = f(A)$.

   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2 *5 points*

L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ défini par son expression analytique : quel que soit le vecteur $\vec{u}(x, y)$ de $\mathcal{E}$, l'image de $\vec{u}$ par f est le vecteur $\vec{u}\,'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$.
2. En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Soit $\vec{V}(3\,; -4)$ un vecteur de $\mathcal{E}$. Donner son image $\vec{V}'$ par l'endomorphisme f.
4. Montrer que f est un endomorphisme bijectif.
5. a. Calculer $f \circ f(\vec{\imath})$ et $f \circ f(\vec{\jmath})$.

   b. En déduire la nature de f.

   c. Déterminer alors la base et la direction de f.

Exercice 3 *7 points*

Partie I

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et (C') sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique : 2 cm.

1. Calculer la dérivée $g'(x)$ et donner son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Sachant que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, dresser le tableau de variation de g.

Partie II

Dans le même repère défini dans la partie I, on considère la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = g(x)$.

   b. En déduire la position relative des courbes (C) et (C').

2. a. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

   b. Montrer que $f'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   c. Établir le tableau de variation de f.

3. En remarquant que les axes de coordonnées sont asymptotes aux courbes (C) et (C'), tracer soigneusement ces deux courbes dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ donné.

Partie III

On note h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ et $k(x) = f(x) - g(x)$.

1. Démontrer que h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan comprise entre les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4 *3 points*

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

1. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

2. a. Déterminer les réels a et b tels que : $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

   b. Calculer la variance de X et l'écart-type.

3. Donner la fonction de répartition de X.