

BACCALAURÉAT — SÉRIE C
Mathématiques — Session 2020
Corrigé détaillé

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned} 2x - 7y = 3 &\iff 2x - 3 = 7y, \quad y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2x - 3 \text{ est un multiple de } 7 \iff 2x - 3 \equiv 0 [7] \iff 2x \equiv 3 [7] \end{aligned}$$

D'où les équations (E_0) et (E_1) sont équivalentes.

2. Solution particulière de $2x \equiv 3 [7]$: 2 et -7 étant premiers entre eux, de l'égalité $7 = 2 \times 3 + 1$ on déduit $2 \times (-3) - 7 \times (-1) = 1$. En multipliant par 3 : $2 \times (-9) - 7 \times (-3) = 3$. On en déduit que $(-9, -3)$ est une solution particulière de (E_1) et $2 \times (-9) \equiv 3 [7]$.

Ensemble des solutions de (E_1) :

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 [7] \\ 2 \times (-9) \equiv 3 [7] \end{cases} \iff 2x \equiv 2 \times (-9) [7] \iff 2(x+9) \equiv 0 [7] \iff 7 \mid 2(x+9).$$

Comme 7 est premier avec 2, d'après Gauss, 7 divise $x+9$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+9 = 7k$. D'où $x = -9 + 7k$. Les solutions de (E_1) sont $\{-9 + 7k ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Rappel de cours. Théorème de Gauss : si un entier a divise un produit bc et si a est premier avec b , alors a divise c . C'est lui qui permet de passer de $7 \mid 2(x+9)$ à $7 \mid x+9$, car 7 et 2 sont premiers entre eux.

Méthode. Pour résoudre une congruence $ax \equiv b [n]$: **1)** chercher une solution particulière x_0 (essais successifs, ou identité de Bézout comme ici) ; **2)** soustraire les deux congruences pour obtenir $a(x-x_0) \equiv 0 [n]$; **3)** conclure avec le théorème de Gauss lorsque a et n sont premiers entre eux : $x \equiv x_0 [n]$.

3. En remplaçant x par $-9 + 7k$ dans (E_0) : $2x - 7y = 3$, on obtient $y = -3 + 2k$. L'ensemble des solutions de (E_0) est $\{(-9 + 7k, -3 + 2k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

4. a. $A = \{1 ; 5 ; 19 ; 95\}$.

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant le système $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$. Comme $2x - 7y = 3 > 0$, alors $x > y$. En utilisant 4.a., les solutions (x, y) de $xy = 95$ vérifiant $x > y$ appartiennent à $I = \{(95, 1), (-1, -95), (-5, -19), (19, 5)\}$.

Couple $(x, y) \in I$ solution de $2x - 7y = 3$:

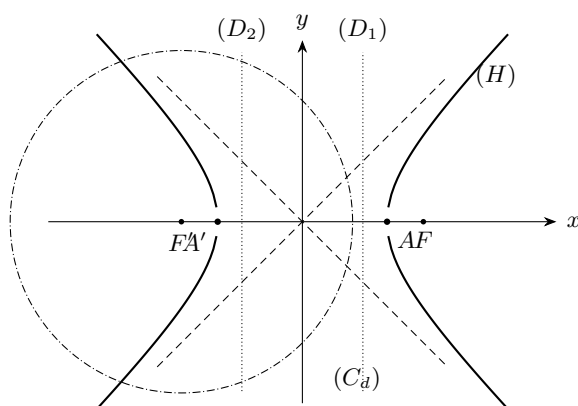
- $2 \times 95 - 7 \times 1 \neq 3$: $(95, 1)$ n'est pas solution.
- $2(-1) - 7(-95) \neq 3$: $(-1, -95)$ n'est pas solution.
- $2(-5) - 7(-19) \neq 3$: $(-5, -19)$ n'est pas solution.
- $2 \times 19 - 7 \times 5 = 3$: $(19, 5)$ est solution.

D'où $(19, 5)$ est le seul couple solution du système.

Piège classique. Un couple qui vérifie $xy = 95$ n'est pas forcément solution du système : chaque candidat doit aussi être testé dans $2x - 7y = 3$, sans en oublier (y compris les couples négatifs), avant de conclure.

Autre méthode : (x, y) vérifie $2x - 7y = 3$, donc d'après 3., $(x, y) = (-9 + 7k, -3 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ce couple vérifie $xy = 95$ si $(-9 + 7k)(-3 + 2k) = 95$, soit $14k^2 - 39k - 68 = 0$, qui admet dans $\mathbb{Z}$ une seule solution $k = 4$. En remplaçant : $(-9 + 28, -3 + 8) = (19, 5)$. Donc $(19, 5)$ est le seul couple solution.

Exercice 2



2. a. Vecteur $\vec{u}$: $f(D) = I$. $f(D) = t_{\vec{u}} \circ S_{(OL)}(D) = t_{\vec{u}}(A)$. On en déduit que $t_{\vec{u}}(A) = I$, d'où $\vec{u} = \vec{AI}$.

b. $f(K)$: $f(K) = t_{\vec{AI}} \circ S_{(OL)}(K) = t_{\vec{AI}}(I) = B$.

3. a. Les asymptotes de (H) sont les droites (AJ) et (BL) .

b. Les foyers sont les points d'intersection du cercle fondamental (centre O' , rayon $O'J$) et de l'axe focal (PQ) .

c. P et Q sont les sommets de l'hyperbole (H) .

d. Le projeté orthogonal H_1 du foyer F sur la diagonale $[AJ]$ du rectangle fondamental $ABJL$ est un point de la directrice associée à F . D'où (D_1) est la perpendiculaire à (PQ) passant par H_1 . De même, le projeté orthogonal H_2 de F' sur la diagonale $[LB]$ donne (D_2) , perpendiculaire à (PQ) passant par H_2 .

e. Soit M_1 le point d'intersection de la demi-droite $[JF)$ et du cercle directeur (C_d) associé à F (centre F , rayon $2 \times O'P$). Alors M_0 est le point d'intersection de la médiatrice de $[F'M_1]$ et du segment $[FJ]$. En effet, $M_0F' - M_0F = M_0M_1 - M_0F = FM_1 = 2 \times O'P$, ce qui prouve que $M_0 \in (H)$.

f. $O'P = 3$ et $O'J = \sqrt{OP^2 + PJ^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$. D'où l'excentricité $e = \frac{O'J}{O'P} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

g. Voir figure.

4. a. $(O', \vec{j})$ et $(O', \vec{i})$ étant respectivement l'axe focal et l'axe non focal de (H) , l'équation cartésienne de (H) est $-\frac{x^2}{O'O^2} + \frac{y^2}{O'Q^2} = 1$. Or $O'O = \|\vec{i}\| = 1$ et $O'Q = 2\|\vec{j}\| = 2$. D'où $-\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, ou encore $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$.

b. Soit $M(x, y)$ un point de (H) et H le projeté orthogonal de M sur la directrice (D_1) associée à F . De l'équation, (H) a pour sommets $Q(0, 2)$, $P(0, -2)$; pour foyers $F'(0, \sqrt{5})$, $F(0, -\sqrt{5})$; pour directrices $y = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$. H a pour coordonnées $H\left(x, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\begin{aligned} MF^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 MH^2 &= x^2 + (y + \sqrt{5})^2 - \frac{5}{4} \left(y + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 - \frac{5}{4} \left(y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}y + \frac{16}{5}\right) = x^2 - \frac{y^2}{4} + 1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{MF}{MH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Donc l'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3

1. a. f est dérivable sur $]0; +\infty[$. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x}$.

b. f' est du signe de $x \mapsto x - 2$ sur $]0; +\infty[$.

Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{4} - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) = +\infty$.

Tableau de variation :

x	02 $+\infty$				
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

c. $f(3) \approx -0,197$ et $f(4) \approx 0,977$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $]3; 4[$, et $f(3) \cdot f(4) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [3; 4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

2. a. Remarquons d'abord que si $x \geq 3$, $8 \ln x + 1 > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{x^2 - 1}{4} = 2 \ln x \iff x^2 = 8 \ln x + 1 \\ &\iff x = \sqrt{8 \ln x + 1} \quad (\text{le cas } x = -\sqrt{8 \ln x + 1} \text{ est impossible car } x \geq 3) \end{aligned}$$

D'où les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur $[3; +\infty[$.

b. g est continue et dérivable sur $[3; 4]$, et $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$ pour tout $x \in [3; 4]$. D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in [3; 4], |g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|$. En prenant $y = \alpha$ et puisque $g(\alpha) = \alpha$: $\forall x \in [3; 4], |g(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|x - \alpha|$.

3. a. Soit $\mathcal{P}_n : u_n \in [3; 4]$. Initialisation : $u_0 = 3 \in [3; 4]$, et d'après 2.b. $u_1 = g(u_0) \in [3; 4]$. Hérédité : si $u_n \in [3; 4]$, alors d'après 2.b. $g(u_n) = u_{n+1} \in [3; 4]$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité de 2.b. en $x = u_n$: $|g(u_n) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$. Or $g(u_n) = u_{n+1}$, d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

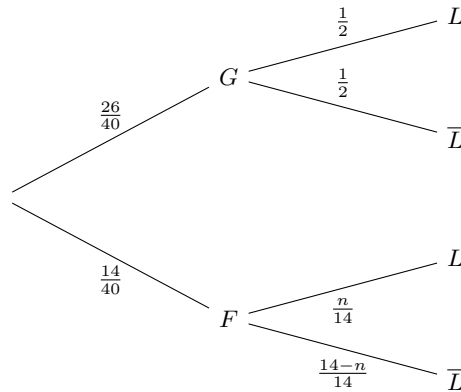
c. Soit $\mathcal{P}_n : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Initialisation : comme $3 \leq \alpha \leq 4$, $-1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0$. Hérédité : d'après 3.b. et l'hypothèse, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- d. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Par passage à la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
- e. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2}$. Par croissance du logarithme, $n \ln \frac{4}{9} \leq -2 \ln 10$, d'où $n \geq \frac{2 \ln 10}{\ln 9 - \ln 4} \approx 5,67$. Donc $n_0 = 6$.

Exercice 4

1. $P(G) = \frac{26}{40}$; $P(F) = \frac{14}{40}$.

2.



3. Première solution : 13 garçons et n filles sur 40 élèves sont inscrits ; donc la probabilité $P(L)$ qu'une personne choisie soit inscrite est $\frac{13+n}{40}$.

Seconde solution : d'après l'arbre, $P(L) = \frac{26}{40} \times \frac{1}{2} + \frac{14}{40} \times \frac{n}{14} = \frac{13+n}{40}$.

4.

$$L \text{ et } G \text{ indépendants} \iff P_G(L) = P(L) \iff \frac{1}{2} = \frac{13+n}{40} \iff n = 7.$$