

Sujet bac 2020 – Série C

Exercice 1

4 points

On se propose de déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation $(E_0) : 2x - 7y = 3$.

1. Montrer que l'équation (E_0) est équivalente à l'équation $(E_1) : 2x \equiv 3 [7]$.
2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .
4. On désigne par A l'ensemble des diviseurs positifs de 95.
 - a. Déterminer A .

- b. Trouver le couple (x, y) vérifiant le système :
$$\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ xy = 95 \end{cases}$$

Exercice 2

8 points

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O , de sens direct.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. (C) est le cercle de diamètre $[AJ]$, de centre O' . P et Q sont les milieux respectifs des segments $[BJ]$ et $[AL]$.

1. Faire une figure avec $AB = 6$ cm.
2. Soit f la symétrie glissée d'axe (OL) .
 - a. Déterminer le vecteur $\vec{u}$ de f , sachant que $f(D) = I$.
 - b. Déterminer $f(K)$.
3. Soit (H) l'hyperbole de rectangle fondamental $ABJL$ et d'axe focal (PQ) .
 - a. Déterminer les asymptotes de (H) .
 - b. Placer les foyers F et F' de (H) (on notera F le foyer le plus proche du point P).
 - c. Déterminer les sommets de (H) .
 - d. Construire les directrices (D_1) et (D_2) de (H) .
 - e. Construire le point M_0 de (H) situé sur le segment $[FJ]$ (on justifiera la construction du point M_0).
 - f. Prouver que l'excentricité de (H) est $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
 - g. Achever la construction de l'hyperbole (H) .
4. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O', \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{O'O}$.
 - a. Montrer que l'équation cartésienne de (H) dans ce repère est : $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$.
 - b. Vérifier l'exactitude du résultat obtenu dans la question 3. f.

Exercice 3

5 points

On considère la fonction numérique f sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - 2 \ln x$.

1.
 - a. Calculer la dérivée f' de f .
 - b. Étudier le sens de variation de f .
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [3; 4]$.
2. Soit g la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{1 + 8 \ln x}$.

Erreur dans l'énoncé : il convient de définir g sur $[3; +\infty[$ et non sur $]3; +\infty[$. En effet, la question 2. b. suppose que $g(3)$ existe.

- a. Montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur l'intervalle $]3; +\infty[$.

Remplacer cette question par : montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

- b. On suppose que : $\forall x \in [3; 4], g(x) \in [3; 4]$ et $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$. Montrer que $\forall x \in [3; 4], |g(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|x - \alpha|$.

3. On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 4]$.

Erreur dans l'énoncé : il s'agit de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3; 4]$.

- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$.

- c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

- d. Montrer que la suite (u_n) converge vers le réel α .

- e. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 4

3 points

Une classe d'un lycée est constituée de 26 garçons et 14 filles. 13 garçons et n filles de cette classe sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues. On choisit au hasard une personne parmi les élèves de cette classe. On note les événements suivants :

- G : « la personne choisie est un garçon »
- F : « la personne choisie est une fille »
- L : « la personne choisie est inscrite dans un centre d'apprentissage de langues »

1. Calculer les probabilités $P(G)$ et $P(F)$.
2. Construire un arbre de probabilités correspondant aux données de l'énoncé, sachant que $P_G(L) = \frac{1}{2}$ et $P_F(L) = \frac{n}{14}$.
3. Montrer que $P(L) = \frac{13 + n}{40}$.

4. Déterminer n pour que les événements L et G soient indépendants.