

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2020
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. $i\bar{z}_2 = 1 - 2i \Leftrightarrow -iz_2 = 1 + 2i \Leftrightarrow z_2 = -2 + i$. Puis $z_1 = -3 + i - z_2 = -1$ et $z_3 = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = i$.
D'où $z_1 = -1$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = i$.
2. **a.** $P(i) = i^3 + (3 - 2i)i^2 + (1 - 4i)i - 1 - 2i = 0$.
- b.** Dans $(z - i)(z - z_0)(z + 2 - i)$, le terme constant est $iz_0(2 - i)$; par identification $z_0(1 + 2i) = -1 - 2i$, d'où $z_0 = \frac{-1 - 2i}{1 + 2i} = -1$.
- c.** $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z + 1)(z + 2 - i) = 0$, soit $z \in \{i, -1, -2 + i\}$.
3. **a.** $R : z' - z_A = a(z - z_A)$ avec $|a| = 1$. Comme $R(B) = C$, $a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + i}{-1 + i} = -i$.
D'où $z' = -i(z + 1) - 1 = -iz - i - 1$.
- b.** $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$: l'angle de R est $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1. **a.** $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- b.** De $\begin{cases} \vec{i} + \vec{j} = \vec{u} \\ -\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{v} \end{cases}$ on tire $\vec{i} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$ et $\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.
2. **a.** $f(\vec{i}) = \frac{2}{3}f(\vec{u}) - \frac{1}{3}f(\vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$; $f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$.
- b.** $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.
- c.** $f \circ f = \text{id}$ sur la base $(\vec{i}, \vec{j})$: f est une symétrie vectorielle.
- d.** Comme $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$: la base $\mathcal{E}$ est engendrée par $\vec{u}$, la direction $\mathcal{D}$ par $\vec{v}$.

Exercice 3

Partie A

1. **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = (x - 2)e^{2-x}$. **b.** h' s'annule en $x = 2$, du signe de $x - 2$.
- c.**

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	1

2. h décroît de $]-\infty; 2]$ sur $[0; +\infty[$ et croît de $[2; +\infty[$ sur $[0; 1]$. Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Méthode. Montrer qu'une fonction est positive sans résoudre d'inéquation : dresser son tableau de variation et constater que son *minimum* vaut 0 (ici $h(2) = 0$). C'est l'argument type pour établir le signe d'une dérivée compliquée, comme $f' = h$ à la partie B.

Partie B

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \underbrace{(1 + e^{2-x})}_{\rightarrow 1} = +\infty.$$

$$2. \text{ a. } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1 + e^{2-x}) + x(-e^{2-x}) = (1-x)e^{2-x} + 1 = h(x) \geq 0.$$

$$\text{ b. } f \text{ est strictement croissante } (f'(2) = h(2) = 0, f(2) = 4), \lim_{-\infty} f = -\infty, \lim_{+\infty} f = +\infty :$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 +	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 4 $\nearrow$	$+\infty$

3. a. f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$: elle admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b. f et f^{-1} ont même sens de variation. f a une tangente horizontale en $x = 2$, donc f^{-1} a une tangente verticale en $f(2) = 4$: f^{-1} n'est pas dérivable en 4.

Rappel de cours. Bijection réciproque : la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$. La symétrie échange tangentes horizontales et verticales : f^{-1} n'est donc pas dérivable aux points images des tangentes horizontales de f .

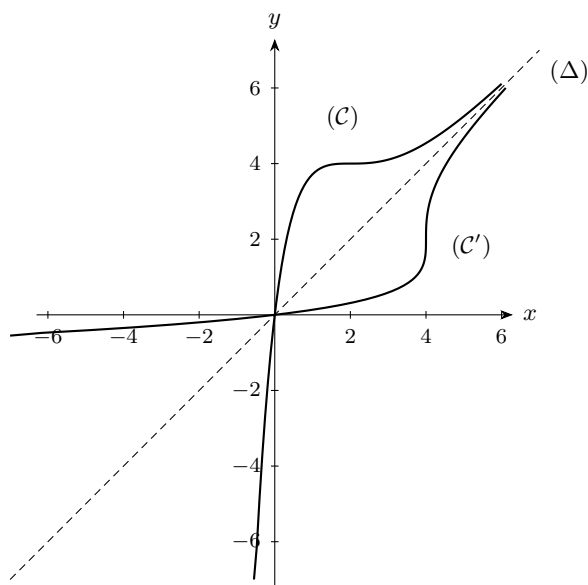
x	$-\infty$	4	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	+	$\parallel$	+
f^{-1}	$-\infty$	2	$+\infty$

$$4. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{2-x}) = +\infty : \text{branche parabolique de direction } (Oy) \text{ en } -\infty.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{2-x} = 0 : \text{la droite } (\Delta) : y = x \text{ est asymptote en } +\infty.$$

$$\text{ c. } f(x) - x = xe^{2-x} : (\mathcal{C}) \text{ est au-dessus de } (\Delta) \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et en dessous sur } \mathbb{R}_-.$$

5.



Exercice 4

1. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$.
2. $p(C) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0,855 = 0,145$.
3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,9 + 0,95 - 0,855 = 0,995$.

Rappel de cours. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ne vaut que pour des événements *indépendants* (hypothèse à repérer dans l'énoncé : appareils fonctionnant indépendamment, tirages avec remise...). En revanche, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ est toujours vraie.