

Sujet bac 2020 – Série D

Exercice 1

5 points

1. Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres z_1 , z_2 et z_3 tels que :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -3 + i \\ i\overline{z_2} = 1 - 2i \\ z_2 \times z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$

2. On considère le polynôme complexe P tel que : $P(z) = z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i$.
- Vérifier que $z = i$ est une racine de $P(z)$.
 - Trouver le nombre complexe z_0 tel que : $P(z) = (z - i)(z - z_0)(z + 2 - i)$.
 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3. Dans le plan complexe, on désigne par A , B et C les points d'affixes respectifs $z_A = -1$; $z_B = -2 + i$ et $z_C = i$.
- Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre A et qui transforme B en C .
 - En déduire l'angle de la rotation R .

Exercice 2

5 points

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

1.
 - Prouver que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
 - Écrire les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = -\vec{v} \end{cases}$$

- Calculer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- Montrer que $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.
- En déduire la nature de f .
- Donner alors la base $\mathcal{E}$ et la direction $\mathcal{D}$ de f .

Exercice 3

7 points

Partie A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $h(x) = (1 - x)e^{2-x} + 1$.

1.
 - Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, calculer $h'(x)$.
 - En déduire le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + e^{2-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2.
 - a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = h(x)$.
 - b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
3.
 - a. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 - b. Dresser le tableau de variation de f^{-1} .
4.
 - a. Préciser la nature de la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.
 - b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
 - c. Étudier la position de (C) par rapport à (Δ) .
5. Construire (Δ) , les courbes (C) et (C') où (C') représente la courbe de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4

3 points

Une entreprise fabrique des pièces pour un client. Le contrat stipule que le produit fabriqué doit être soumis à deux tests distincts de normes de qualité A et B . La pièce est acceptée si elle a satisfait à ces deux tests qui sont indépendants l'un de l'autre.

On note :

- A l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité A ».
- B l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité B ».

Une étude a démontré que la probabilité de l'événement A est $P(A) = 0,9$ et celle de l'événement B est $P(B) = 0,95$.

1. Calculer $P(A \cap B)$ avec $A \cap B$ l'événement « le produit est conforme à la norme A et à la norme B ».
2. Soit C l'événement « le produit n'est pas accepté par le client ; donc il est déclaré non conforme ». Montrer que $P(C) = 0,145$.
3. On suppose que le stock du client étant trop bas, il accepte de prendre le produit s'il satisfait soit au test A ou au test B , donc il appartient à $A \cup B$. Calculer $P(A \cup B)$.