

BACCALAURÉAT — SÉRIE D
Mathématiques — Session 2021
Corrigé détaillé

Exercice 1

1. a. $(2i)^3 + 8i = -8i + 8i = 0$: $a = 2i$ est solution de (E) : $z^3 + 8i = 0$.

b. $(z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) = z^3 + 8i$.

c. $z^2 + 2iz - 4 = 0$ a pour discriminant réduit $\delta = i^2 + 4 = 3$, d'où $z = -i - \sqrt{3}$ ou $z = -i + \sqrt{3}$.
 Les solutions de (E) sont $S = \{2i; -i - \sqrt{3}; -i + \sqrt{3}\}$.

2. a. $u = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $|u| = 1$ et $\arg(u) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b. $|u| = 1$ donne $AC = AB$ (triangle isocèle en A) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Donc le triangle ABC est équilatéral.

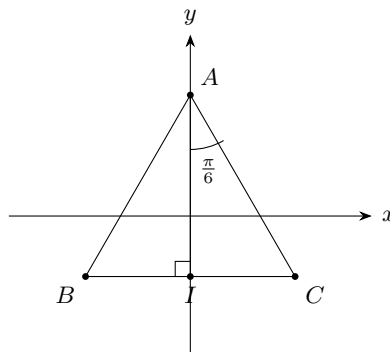
3. a. Soit $z' = az + b$ l'expression de la similitude S .

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ia + b = 2i \\ a(\sqrt{3} - i) + b = -i \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

D'où $z' = \left(\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

Méthode. Similitude directe déterminée par deux points et leurs images : poser $z' = az + b$, écrire l'équation pour chaque couple point-image, puis *soustraire* les deux équations pour isoler a ; b s'en déduit. Le rapport est $|a|$ et l'angle $\arg a$.

b. $|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $a = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$: S est la similitude d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



(Comme $S(A) = A$ et $S(C) = I$, l'angle est $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \equiv -\frac{\pi}{6}$ et le rapport $\frac{AI}{AC} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, I étant le pied de la hauteur issue de A .)

Exercice 2

1. a. $\begin{cases} f(\vec{v}_1) = \vec{0} \\ f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -f(\vec{i}) + 5f(\vec{j}) = \vec{0} \\ -2f(\vec{i}) + 5f(\vec{j}) = -2\vec{i} + 5\vec{j} \end{cases}$, d'où $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}$.

b. Matrice de $f : \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\det = 2 \times (-1) - (-5) \times \frac{2}{5} = 0 : f$ n'est pas bijectif.

3. a. $f(\vec{u}) = x(2\vec{i} - 5\vec{j}) + y(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j})$, d'où $\begin{cases} x' = 2x + \frac{2}{5}y \\ y' = -5x - y \end{cases}$.

b. $f \circ f(\vec{i}) = f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j}) = f(\vec{j})$ (calcul direct).

c. $f \circ f = f : f$ est une projection vectorielle, de base l'ensemble des vecteurs invariants et de direction le noyau de f .

Méthode. Distinguer projection et symétrie : calculer $f \circ f$ sur les vecteurs de base. $f \circ f = f$ donne une projection, $f \circ f = \text{id}$ une symétrie. Le déterminant aide aussi : une symétrie est toujours bijective, alors qu'une projection (autre que l'identité) a un déterminant nul — comme ici.

d. Base : $f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow 5x + 2y = 0 : \text{droite engendrée par } (-2, 5)$. Direction : $f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5x + y = 0 : \text{droite engendrée par } (-1, 5)$.

Exercice 3

Partie A

1. $f = (\ln)^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$.

2. f' s'annule en $x = 1$, du signe de $\ln x : f$ décroît sur $]0; 1[$, croît sur $]1; +\infty[$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

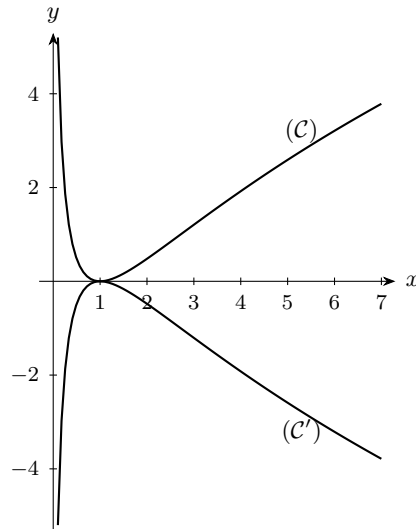
4.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

5. En posant $x = \frac{1}{u^2} : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} 4(u \ln u)^2 = 0$ (car $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$).

Rappel de cours. Croissances comparées du logarithme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$ pour tout n , et $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$ — toute puissance l'emporte sur le logarithme. Un changement de variable bien choisi (ici $x = 1/u^2$) ramène souvent à ces limites de référence.

6. $(\mathcal{C}) : y = (\ln x)^2$ et $(\mathcal{C}') : y = -(\ln x)^2$ (symétrique par rapport à (Ox)).



Partie B

1. Si $(x, y) \in (C)$, alors $(x, -y) \in (C')$: (C') s'obtient de (C) par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

2. Avec $g = -f$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	+	0	-	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Partie C

1. $H(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ vérifie $H'(x) = (\ln x)^2 = f(x)$: H est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2. $\int_1^e (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_1^e f(x) dx = 2[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x]_1^e = 2(e - 2)$. L'aire est $\mathcal{A} = 2(e - 2) \times 4 = 8(e - 2) \text{ cm}^2$.

Exercice 4

On note $(x_i, n_{i\bullet})$ et $(y_j, n_{\bullet j})$ les distributions marginales, $N = 80$.

1. Lois marginales :

X	0	1	2	3	4
$n_{i\bullet}$	10	18	27	18	7

Y	1	2	3
$n_{\bullet j}$	13	30	37

2. $\bar{X} = 1,93$, $\bar{Y} = 2,3$.

$$V(X) = \frac{10(0)^2 + 18(1)^2 + 27(2)^2 + 18(3)^2 + 7(4)^2}{80} - 1,93^2 = 1,275$$

$$V(Y) = \frac{13(1)^2 + 30(2)^2 + 37(3)^2}{80} - 2,3^2 = 0,535$$

3. $Y = aX + b$ avec $a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{0,44}{1,275} = 0,345$ et $b = 2,3 - 0,345 \times 1,93 = 1,634$. D'où $Y = 0,345X + 1,634$.

$$4. \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{0,44}{\sqrt{1,275}\sqrt{0,535}} = 0,533.$$