

Sujet bac 2021 – Série D

Exercice 1

5 points

- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E) : z^3 + 8i = 0$ où z désigne l'inconnue.
 - Vérifier que le nombre $a = 2i$ est une solution de (E) .
 - Prouver que l'équation (E) peut s'écrire : $(z - 2i)(z^2 + 2iz - 4) = 0$.
 - Achever la résolution de l'équation.
- Dans un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2i, -\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} - i$.
 - Calculer le module et un argument du complexe : $U = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
 - En déduire la nature du triangle ABC .
- On note I le point d'affixe $-i$ et S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en I .
 - Donner l'écriture complexe de S .
 - Déterminer l'angle et le rapport de S .

Exercice 2

5 points

L'espace vectoriel étant rapporté à une base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\vec{v}_1) = \vec{0}$ et $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$, avec $\vec{v}_1 = \vec{i} + 5\vec{j}$ et $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.

Attention ! Une erreur dans la définition du vecteur $\vec{v}_1$. Prendre plutôt $\vec{v}_1 = -\vec{i} + 5\vec{j}$.

- Montrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \frac{2\vec{i}}{5} - \vec{j}$.
 - En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- Prouver que f n'est pas bijective.
- Soit $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ image du vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ par f .
 - Exprimer les coordonnées x' et y' du vecteur $\vec{u}'$ en fonction de x et y du vecteur $\vec{u}$.
 - Montrer que $f \circ f(\vec{i}) = f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j}) = f(\vec{j})$.
 - En déduire la nature de f .
 - Donner les éléments caractéristiques de f .

Exercice 3

7 points

f est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$. (C) est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. f' désignant la fonction dérivée de f , montrer que $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter.
6. Construire (C) .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -f(x)$ et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Comment peut-on déduire (C') de (C) ?
2. Sans étudier g , dresser son tableau de variation.
3. Construire (C') dans le même repère que (C) .

Partie C

On désigne par H la fonction définie par $H(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer en cm^2 , l'aire de la portion du plan délimitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4

3 points

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous où X représente le nombre d'exemplaires du produit et Y représente le prix de vente du produit en milliers de francs CFA.

$X \setminus Y$	1	2	3
0	6	3	1
1	4	11	3
2	1	10	16
3	0	5	13
4	2	1	4

1. Déterminer les séries marginales respectives de X et de Y .
2. Déterminer les variances de X et de Y sachant que le point moyen G est $G(1,93; 2,3)$.
3. On donne $\text{cov}(X, Y) = 0,44$. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X .
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.